Topologie

1. (34) Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   (b) Démontrer que: $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E. %item

2. (41) Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
   Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
   Remarques
   (a) On utilisera au moins une fois des suites.
   (b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
   (c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

3. (44) Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
   (a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   ii. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
   (b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque: Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
   (c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

4. (45 partiel) Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
   (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) On pose $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.
   Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

5. (37 partiel) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\, f \in E,\ N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.
   (a) On a déjà démontré que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

6. (38 partiel) On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
   $\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
   (a) On a déjà démontré que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

7. Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A+B = \{a+b / a \in A, b \in B\}$. Montrer que

   (a) Si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.

   (b) Si A et B sont fermées, alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermée.

8. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ou fermés ? ou on ne peut pas conclure avec si peu d'hypothèses ?

   (a) $A = \mathbb{N}^*$; $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

   (b) $C = \{\dfrac{n+1}{n} / \ n \in \mathbb{N}^*\}$; $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$

   (c) $E = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[$; $F = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$

   (d) $G = \displaystyle\bigcup_{x \in X} \{x\}$ où X est une partie de $\mathbb{R}^2$; $H = \displaystyle\bigcap_{x \in X} X - \{x\}$ où X est une partie de $\mathbb{R}^2$

   (e) $J = \{u_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ où (u_n) est une suite convergeant vers ℓ dans l'evn E

   (f) $K = \{u_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu\}$ où μ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

9. Donner l'adhérence des ensembles suivants

   (a) $A = \mathbb{N}$; $B = \mathbb{Q}_+^*$; $C = \{n + \dfrac{1}{n}\ n \in \mathbb{N}^*\}$

10. Soient E et F deux evn, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
    Montrer que $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

11. Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$. montrer que D est infinie, et que si on enlève à D un nombre fini d'éléments, alors la nouvelle partie est encore dense dans $\mathbb{R}$. Et si on enlève tous les termes d'une suite de D ?

12. E un evn.

    (a) Montrer que si A un ouvert de E alors $E = \text{Vect}(A)$.

    (b) Soit F un sev de E. Montrer que l'intérieur de F est vide ou égal à E.

    (c) Soit F un sev de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.

    (d) Montrer qu'un hyperplan de E est dense ou fermé.

    (e) Soit A une partie de E. Montrer que $\text{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{Vect}(A)}$

13. Soit E un evn et A une partie de E.

    (a) Montrer que la frontière de A est un fermé.

    (b) Montrer que A est fermé si et seulement si $\text{fr}(A) \subset A$.

    (c) Montrer que A est ouvert si et seulement si $\text{fr}(A) \cap A = \emptyset$

14. E un evn, et U un ouvert de E. Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

15. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \to +\infty$, $v_n \to +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \to 0$.

    (a) Donner un exemple d'une telle suite (u_n).

    (b) Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0, |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
    Montrer que pour tout $a > u_{n_0}$, il existe $n > n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

    (c) En déduire que $\{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

    (d) Montrer que $\{m - \ln n / (m, n) \in \mathbb{Z}\ N^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

16. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices de la forme $A - \lambda I_n$.

17. (a) On note $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit P l'ensemble des fonctions de E positives ou nulles. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de P.

    (b) Même question dans le cas où la norme sur E est la norme $||f|| = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

18. Montrer que la suite $(\cos \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$ (*on pourra utiliser l'exercice 7*)