Variables aléatoires discrètes (CCP)

1. (96) Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
   (a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   i. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   ii. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
   (b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   i.Déterminer la loi de X.
   ii. Déterminer la loi de Y.

2. (97) On admet, dans cet exercice, que:
   $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
   Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
   On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
   On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte. Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
   La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
   Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

3. (98) Soit $a \in]0,+\infty[$.
   Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par:
   $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = j, Y = k) = \dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
   (b) Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

4. (99) Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
   On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p (p \in]0,1[)$.
   Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Donner la loi de X. Justifier.
   (b) Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   i. Soit $i \in [[0,n]]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

5. (100) **(a)** Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
   (b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que: $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
   (c) Application:
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

6. (101) Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
(b) Calculer λ.
(c) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
(d) X admet-elle une variance? Justifier.

7. (104) **Remarque**: les questions (a) et (b) sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
(a) i. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
(b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

8. (107) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par: $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.
(a) Déterminer la loi du couple (U, V).
(b) Expliciter les lois marginales de U et de V.
(c) U et V sont-elles indépendantes?

9. (109) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par: $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$
(a) Déterminer les lois de X et de Y.
(b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
ii. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
(d) Calculer $P(X = Y)$.

10. (111) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
(a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t. On note R_X son rayon de convergence.
i. Prouver que $R \geqslant 1$.
On pose alors $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
(b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

11. (112) On admet, dans cet exercice, que:
$\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]-1, 1[$ et soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par:
$$P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
(b) i. Déterminer la loi de Y.
ii. Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
iii. Déterminer l'espérance de Y.
(c) Déterminer la loi de X.