

Compacité, connexité par arcs

1. Les ensembles suivants sont-ils des compacts de $\mathbb{R}$?
 - (a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 + x^7 + x^8 > 0\}$
 - (b) $B = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1\}$
 - (c) $D = f^{-1}([0, 1])$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$?
 - (d) $E = p(B)$ où B est un compact de $\mathbb{R}^2$ et p la projection $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow x \end{cases}$.
 - (e) $F = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 + 1)e^{x-1} \cos(x) \in [0, 1]\}$.
2. Soit E un espace vectoriel normé, K un compact de E et f une isométrie de K (c'est-à-dire que f est une application de K dans K telle que $\forall (x, x') \in K^2, \|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\|$).
 - (a) Vérifier que f est injective.
 - (b) On suppose que $\exists x_0 \in K \setminus f(K)$.
Montrer que $d(x_0, f(K)) = r > 0$.
Considérer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ et prouver que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q \implies \|x_p - x_q\| \geq r$.
Montrer que l'on aboutit à une contradiction. Qu'en conclut-on ?
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ normé par la norme $\left\| \sum_i a_i X^i \right\| = \sup_i |a_i|$. Montrer que $B = \{P / \|P\| \leq 1\}$ n'est pas compact.
4. Soit E un evn.
 - (a) Soit K_1 et K_2 deux compacts de E . Montrer qu'il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = \inf\{d(x, y) / x \in K_1, y \in K_2\} = d(K_1, K_2)$
 - (b) Soit K un compact de E et F un fermé de E . Montrer que si K et F sont disjoints, alors $d(K, F) \neq 0$.
 - (c) Montrer que ce résultat est faux dans le cas où K est seulement fermé.
5. E un espace de Banach, et K un compact de E . Soit f une application de E telle que $f(K) \subset K$ vérifiant : $\forall x, y \in K, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
En considérant l'application $x \rightarrow d(x, f(x))$, montrer que f admet 1 et 1 seul point fixe.
6. Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(nx)$.
 - (a) Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $n, p \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.
7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et injective. Montrer que f est strictement monotone : on pourra considérer $X = \{(x, y) \in I^2 / x < y\}$ montrer que X est connexe, puis considérer $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = f(x) - f(y)$.
8. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
9. E un evn de dimension finie, et A et B deux parties de E connexes par arcs.
Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
Montrer que $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ est aussi connexe par arcs.
10. E un evn de dimension finie, et $f : E \rightarrow E$ contractante. Soit $a \in E$. On définit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$.
 - (a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge dans E .
 - (b) Montrer que f a un unique point fixe.
11. On note $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du cercle unité U ayant même image par f .