DS n°1

mercredi 16 septembre 2015 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice : Autour des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans ce problème si p est un entier, on notera $\bar{p}$ la classe de p , élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$

(a) $\bar{12}$ est-il inversible, et si oui donner son inverse.

Même question avec $\bar{11}$.

(b) Résoudre le système
$$\begin{cases} \bar{5}x + y &= \bar{3} \\ \bar{12}x + \bar{2}y &= \bar{2} \end{cases}$$

2. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

(a) $\bar{12}$ est-il inversible, et si oui donner son inverse.

Même question avec $\bar{11}$.

(b) Résoudre le système
$$\begin{cases} \bar{5}x + y &= \bar{3} \\ \bar{12}x + \bar{2}y &= \bar{2} \end{cases}$$

(c) Donner l'ensemble noté U des éléments inversibles de l'anneau.

(d) $(U, \times)$ est-il un groupe ? Démontrer le.

(e) Montrer que $(U, \times)$ est cyclique.

(f) Quel est l'ordre de 7 dans U ?

Problème

Partie I

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $E_n = \mathbb{Z}^2$ muni des opérations addition $\oplus$ et multiplications $\otimes$ définies par :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac + nbd, ad + bc)$$

1. Montrer que $(E_n, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif (Pour gagner du temps, on ne demande pas de prouver la distributivité ...).

2. Notons $E'_n = \{(a, 0) / a \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que E'_n est un sous anneau de $(E_n, \oplus, \otimes)$ isomorphe à $\mathbb{Z}$

3. (a) Dans cette question seulement, $n = 9$. En considérant les couples $(3, 1)$ et $(3, -1)$ montrer que l'anneau E_9 n'est pas intègre.

(b) Plus généralement, montrer que si n est un carré d'entier alors E_n n'est pas intègre.

(c) Préliminaire : Montrer que s'il existe un rationnel r tel que $r^2 = n$ alors r est entier.

(d) Montrer que E_n est intègre si et seulement si n n'est pas un carré d'entier.

4. Si E_n n'est pas intègre et si x désigne une racine entière de n , montrer que l'ensemble

$$F_n = \{(a, b) \in E_n / a + xb = 0\}$$
 est un idéal de E_n .

5. On suppose ici que E_n est intègre et on désigne par x une racine de n dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Notons $\mathbb{Z}[x] = \{a + xb / (a, b) \in E_n\}$. Soit φ l'application de E_n dans $\mathbb{Z}[x]$ définie par $\varphi(a, b) = a + xb$. Vérifier que φ est un isomorphisme d'anneaux

Partie 2

Dans toute la suite on suppose que E_n est intègre, et on notera x une racine non entière de n ; x est fixé.

6. (a) Pour $z = a + xb$ un élément de $\mathbb{Z}[x]$ on pose $\tilde{z} = a - xb$. On pose alors $\|z\| = \sqrt{|z \cdot \tilde{z}|}$.
Exprimer $z \cdot \tilde{z}'$ en fonction de $\tilde{z}$ et $\tilde{z}'$.
Montrer que $\|z \cdot z'\| = \|z\| \cdot \|z'\|$
  - (b) Montrer que $\|z\|^2$ est un entier positif.
  - (c) Montrer que si z est inversible alors $\|z\| = 1$.
  - (d) Réciproquement, montrer que si $\|z\| = 1$ alors z est inversible dans $\mathbb{Z}[x]$.
7. Cas où $n = -1$ Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$? En déduire les éléments inversibles de E_{-1} .
  8. Cas où $n > 0$.
    - (a) Donner deux éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (autres que 1 et -1)
    - (b) Montrer que si z est inversible dans $\mathbb{Z}[x]$ alors z^2 est inversible dans $\mathbb{Z}[x]$.
    - (c) Montrer qu'il existe un élément inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ strictement supérieur à 1.
    - (d) En déduire que l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est infini.
    - (e) Qu'en conclure sur les éléments inversibles de E_5 ?