DM n°1

A rendre mercredi 9 septembre 2015

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Étude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Obtenir l'ensemble de définition D de f.
A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?
A - 3) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.
A - 4) Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$.

B - Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}$.
B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.
B - 3) Montrer que $\forall x \geqslant \mathrm{e}, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
B - 4) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
B - 5) Déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Étude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
Étudier les variations de g.
C - 2) Déterminer la limite de g en 1.
C - 3) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.
C - 4) Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = \mathrm{e}$.

D - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.
On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

D - 1) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2).
D - 2) Résoudre (E_2) sur K. On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$.
Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K.
D - 3 Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$.
Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

E - Étude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale : On pose $H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

E - 1) Déterminer l'ensemble de définition J de H.
E - 2) Étudier la limite de H en 0.
E - 3) Justifier qu'il existe un réel a dans $]0;1]$ tel que $\forall x \in [a;1[,\quad \dfrac{3}{2}(x-1) \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2}(x-1)$
En déduire la limite de H à gauche en 1.

PROBLÈME D' ALGEBRE

On note $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On note $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ .0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

On rappelle que $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$ est un espace vectoriel et que $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$ est un anneau.
On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2$ est $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ avec

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

A est une matrice fixée de $\mathfrak{M}_2$, différente de I et θ, on considère f de $\mathfrak{M}_2$ vers lui-même définie par

$$f : M \mapsto f(M) = M \times A - A \times M$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2$.
2. Soit $\mathcal{C} = \{M \in \mathfrak{M}_2 \quad / \quad A \times M = M \times A\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$.
3. Montrer que I et A appartiennent à $\ker f$.
4. Montrer que $\ker f$ est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire
   $M \in \ker f$ et $N \in \ker f \Rightarrow M \times N \in \ker f$ (la démonstration sera détaillée).
5. Montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un anneau.
6. On rappelle que la trace d'une matrice carrée A, que l'on note $tr(A)$, est la somme de ses éléments diagonaux. Quel lien y a-t-il entre $\mathrm{Im} f$ et $\ker tr$.

Partie B

On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2$.

1. Calculer $f(M)$.
2. (a) Montrer que $\ker f$ est le sous-espace vectoriel engendré par I et A.
   (b) Trouver une base de $\ker f$ et préciser la dimension de $\ker f$ ainsi que le rang de f. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $N = \alpha.I + \beta.A$ un élément de $\ker f$; déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Résoudre dans $\ker f$ l'équation : $N^2 = I$.

Partie C

On revient au cas général et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Montrer que si A est une matrice scalaire (i.e. $A = aI$ avec $a \in \mathbb{R}$) alors $\mathcal{C} = \mathfrak{M}_2$.
   (b) Montrer que pour toute matrice A le rang de f est inférieur ou égal à 2.
   (c) Calculer le rang de f lorsque A n'est pas une matrice scalaire. En déduire la dimension de $\mathcal{C}$ lorsque A n'est pas une matrice scalaire.
3. Soit $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2$engendré par la famille $\{A^n / n \in \mathbb{N}\}$
   (a) Vérifier que $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$
   (b) Montrer que $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I$.
   (c) En déduire que $\mathcal{V} = Vect(I, A)$ puis que $\dim(\mathcal{V}) \leqslant 2$.
   (d) Montrer que $\mathcal{V} = \mathcal{C}$ si et seulement si A n'est pas une matrice scalaire. Préciser alors une base de $\mathcal{C}$