DM n°8

A rendre mercredi 9 décembre 2015

Caractérisation des fonctions Hölderiennes

$\mathcal{C}$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques (à valeurs réelles) définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Chacune des fonctions de $\mathcal{C}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$. La norme d'une fonction f de $\mathcal{C}$ est définie par $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{C}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ formé des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire des fonctions P de la forme $P(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, (cette dernière somme étant nulle si $n = 0$), où $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}$ donnés, $d_n(f)$ désigne la distance de f à $\mathcal{C}_n$, c'est-à-dire

$$d_n(f) = \inf\{\|f - P\| \ ;\ P \in \mathcal{C}_n\}.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On dit que la fonction f de $\mathcal{C}$ a la propriété L_α lorsque

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^\alpha.$$

Partie I : quelques propriétés des polynômes trigonométriques.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que tout polynôme trigonométrique P appartenant à $\mathcal{C}_n$ s'écrit de manière unique $P(x) = \sum\limits_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikx}$, où $(c_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ est une suite finie de nombres complexes telle que $\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \bar{c_k} = c_{-k}$.

   (b) Soit $\mathcal{A} = \{(c_{-n}, ...c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_n)/\forall k \in \{-n, ...n\},\ c_{-k} = \bar{c_k}\ \}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et donner sa dimension.

   (c) En considérant l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{C}_n \\ (c_k) & \to & P = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \end{array}\right.$, déterminer la dimension de $\mathcal{C}_n$.

   (d) Soit $(x_j)_{j\in[\![0,2n]\!]}$ une suite finie de $(2n + 1)$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[0, 2\pi[$
   Soit $\psi \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n & \to & \mathbb{R}^{2n+1} \\ P & \to & (P(x_0), ..., P(x_{2n})) \end{array}\right.$ Montrer que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   En déduire que pour toute suite finie $(x_j)_{j\in[\![0,2n]\!]}$ de $(2n + 1)$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[0, 2\pi[$, et pout toute suite finie $(y_j)_{j\in[\![0,2n]\!]}$ de $(2n + 1)$ réels, il existe un unique polynôme P de $\mathcal{C}_n$ tel que $\forall j \in [\![0, 2n]\!],\ P(x_j) = y_j$.

2. (a) Soit $f \in \mathcal{C}$; démontrer que $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \{-1, +1\}\ /\ f(a) = \varepsilon \|f\|$.

   (b) Soit P un polynôme trigonométrique appartenant à $\mathcal{C}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et qui vérifie les relations $\mathcal{R}$: $\|P\| = 1$ et $\|P'\| = P'(0)$ et $\|P'\| > n$.
   Soit alors le polynôme trigonométrique S défini sur $\mathbb{R}$ par la relation $S(x) = \dfrac{\|P'\|}{n} \sin(nx) - P(x)$.
   i. Calculer $S'(0)$; montrer que $P''(0) = 0$ et calculer $S''(0)$.
   ii. En évaluant $S((2k + 1)\dfrac{\pi}{2n})$ pour $k \in [\![-1, 2n - 1]\!]$, prouver que S admet au moins $2n$ zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.
   iii. Montrer que la dérivée S' admet au moins $2n$ zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.
   iv. En déduire que S'' admet au moins $2n + 1$ zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.
   v. Montrer que $S'' = 0$.
   Existe-t-il des polynômes trigonométriques P vérifiant les relations $\mathcal{R}$?

   (c) Démontrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathcal{C}_n,\ \|P'\| \leqslant n\,\|P\|$ (*cette relation est connue dans le milieu sous le nom d'inégalité de Bernstein*).

Partie II : Soit f une fonction donnée de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que la suite $(d_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathcal{C}_n\ /\ d_n(f) = \|f - P_n\|$.

3. Démontrer les inégalités suivantes:
$$\|P_1' - P_0'\| \leqslant 2d_0(f)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|P_n' - P_{2n}'\| \leqslant 4nd_n(f).$$

4. Démontrer l'inégalité suivante:
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left\|P_{2^k}' - P_1'\right\| \leqslant 4\sum_{p=0}^{k-1} 2^p d_{2^p}(f).$$
En déduire $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left\|P_{2^k}'\right\| \leqslant 8\displaystyle\sum_{p=0}^{2^{k-1}} d_p(f)$.

5. Déduire des résultats précédents que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 2d_{2^k}(f) + 8|x-y|\sum_{p=0}^{2^{k-1}} d_p(f).$$

6. Soit α un réel donné, $\alpha \in]0,1[$.

   (a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.
   En comparant $\dfrac{1}{p^\alpha}$ à une intégrale, montrer que $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n \leqslant Kn^{1-\alpha}$.

   (b) Soit x et y deux réels distincts ; prouver que
$$|x-y| < 1 \Longrightarrow \exists! N \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^{N+1}} < |x-y| \leqslant \frac{1}{2^N}.$$

   (c) Démontrer à partir des résultats précédents que si la suite $(n^\alpha d_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, alors f vérifie la propriété L_α ; en d'autres termes, prouver l'implication suivante : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^\alpha d_n(f) \leqslant M \Longrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$ (on cherchera à majorer le rapport $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ en séparant les deux cas $|x-y| \geqslant 1$ et $|x-y| \leqslant 1$).

Partie III

1. (a) Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout réel x différent de $2k\pi$, démontrer les relations :
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} \quad , \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)\frac{x}{2}) = \frac{\sin^2(n\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$
   Ces relations se prolongent-elles par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{C}$, on considère les fonctions de $\mathcal{C}$ définies par les relations $\forall x \in]0, 2\pi[,\ J_n(x) = \dfrac{\sin^2(n\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$
   et $\forall x \in \mathbb{R},\ K_n(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)J_n(t)\,dt$.
   Démontrer que J_n et $K_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques de $\mathcal{C}_{n-1}$ (on établira que $K_n(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)J_n(u-x)\,du$).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_n(x)\,dx$.

   (a) Calculer la valeur de u_n (on utilisera III 1.b.).

   (b) Dans cette dernière question, la fonction f de $\mathcal{C}$ a la propriété L_α.
   Démontrer, en majorant $||f - \dfrac{1}{u_n}K_n(f)||$, que la suite $(n^\alpha d_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.