

A rendre mercredi 18 novembre 2015

Utilisation des polynômes de Tchebychev

Dans tout le problème on conviendra de l'abus de notations suivant : Un polynôme et la fonction qu'il définit sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point seront désignés de la même manière.

On notera E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.

On notera $\tilde{E}_n$ la partie de E_n constituée de polynômes de degré n exactement dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1 (ce sont les polynômes de degré n "normalisés").

On notera E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est un élément de E , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$

I. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité

(a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*) :

(*) : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$)

(b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique. On l'appelle Polynôme de Tchebychev d'indice n , on le note T_n .

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1, 1]$ par : $\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arcos} x)$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ (**).

Montrer que cette relation (**) est vraie pour tout x réel.

(b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 , ainsi que $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

(c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n .

3. Démontrer que la famille $(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n)$ est une base de E_n .

4. Racines et extrema

(a) Déterminer les racines du polynôme T_n et montrer qu'elles sont toutes réelles et appartiennent à $[-1, 1]$.

(b) On pose pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}, c_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$.

Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que

: $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.

(c) Dessiner le graphe de T_3 , préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3 .

II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Pour f et g éléments de E , on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos x) dx$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E on pose $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle}$.

2. Calculer $\langle T_n, T_m \rangle$ selon les valeurs des entiers naturels m et n . En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de E_n pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$

3. Énoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$

4. Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev. On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n .

III.

Dans cette partie E est muni de la norme infinie : $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

On désignera par $\tilde{T}_n$ le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ si $n \geq 1$ et on posera $\tilde{T}_0 = T_0$.

A.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\| \tilde{T}_n \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}$
2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il n'existe pas de polynômes $Q \in \tilde{E}_n$ tels que $\|Q\| < \frac{1}{2^{n-1}}$ (pour cela on regardera le nombre de racines du polynôme $\tilde{T}_n - Q$ dans $[-1, 1]$.
En déduire que la borne inférieure $\inf_{Q \in \tilde{E}_n} \|Q\|$ est égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$ et qu'elle est atteinte pour un certain polynôme de $\tilde{E}_n$.
3. Démontrer que lorsque $n = 1$ alors $\inf_{Q \in \tilde{E}_n} \|Q\|$ est atteinte en un seul point de $\tilde{E}_n$.

B.

1. Étant donnés $(n+1)$ points distincts de $[-1, 1]$: $x_0, x_1, \dots, x_n$ et $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme L_n appartenant à E_n vérifiant les conditions : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, L_n(x_k) = f(x_k)$.
Le polynôme L_n s'appelle le polynôme d'interpolation relatif à f et aux points $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$.
2. Soit f une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[-1, 1]$ et L_n son polynôme d'interpolation relatif aux points $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$.
 - (a) Soit $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. On considère la fonction définie sur $[-1, 1]$: $\psi(t) = f(t) - L_n(t) - (t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)A$ où A est une constante telle que $\psi(x) = 0$. En utilisant un certain nombre de fois le théorème de Rolle montrer qu'il existe $\zeta \in]-1, 1[$ tel que $\psi^{(n+1)}(\zeta) = 0$
 - (b) En déduire que si $\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, alors

$$\forall x \in [-1, 1], \exists \zeta \in]-1, 1[\text{ tel que } f(x) - L_n(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$
 - (c) Montrer que $\|f - L_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \cdot \|\pi\|$.
3. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$.
Montrer en utilisant A. que l'on peut trouver une suite de polynômes d'interpolation (L_n) telle que l'on ait les majorations

$$\|f - L_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!2^n}.$$

 En déduire une condition suffisante sur f , indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$ pour que f soit limite dans l'espace vectoriel normé E d'une suite de polynômes d'interpolation.
4. (a) Montrer la double inégalité : $\frac{1}{e(n+1)!2^n} \leq \|e^x - P_n(x)\| \leq \frac{e}{(n+1)!2^n}$
 (b) Montrer que $\|e^x - S_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right\| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
 En déduire la double inégalité : $\frac{1}{(n+1)!} < \|e^x - S_n(x)\| \leq \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$ où $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
 (c) Comparer l'ordre de grandeur de $\|e^x - L_n(x)\|$ et de $\|e^x - S_n(x)\|$ lorsque n tend vers $+\infty$