DS n°3

mercredi 4 novembre 2015 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème : autour de la série harmonique

Dans tout le problème on notera H_n la somme partielle de la série harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie A

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = H_n - \ln(n)$

1. Montrer que la suite u est strictement décroissante et positive, et qu'elle converge vers une limite γ. Ce nombre γ est appelé la constante d'Euler.
2. Montrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \frac{1}{2n}$ est strictement croissante.
3. En déduire l'encadrement : $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.
4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \gamma + r_n$.
   (a) Justifier l'encadrement suivant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < r_n < \frac{1}{2n}$.
   (b) Combien de termes $\frac{1}{k}$ faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-10} en utilisant la suite u ?

Partie B

On veut préciser le majorant de r_n obtenu au I par la détermination d'un développement asymptotique.

1. (a) Soit f une application de classe C^6 sur $[0, 1]$.
   Démontrer la formule
   $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(1) + f'(0)) - \frac{1}{12}(f''(1) - f''(0)) + \frac{1}{720}(f^{(4)}(1) - f^{(4)}(0)) - \frac{1}{120}\int_0^1 (x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x) f^{(6)}(x)\, dx$.
   (b) Factoriser le polynôme $X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X$ et prouver que
   $\forall x \in [0, 1],\ |x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x| < \frac{1}{12}$.
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}) + \frac{1}{12}(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}) - \frac{1}{120}(\frac{1}{(k+1)^4} - \frac{1}{k^4}) + w_k$, avec $|w_k| \leqslant \frac{1}{60}(\frac{1}{k^5} - \frac{1}{(k+1)^5})$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*,\ N \geqslant n + 1$.
   Sommer les inégalités précédentes pour k allant de n à $N - 1$ et prouver par un passage à la limite que $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4} + \epsilon_n$, avec $|\epsilon_n| \leqslant \frac{1}{60n^5}$ (on déterminera les réels a, b, c, d).

3. Quelle suite $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-il judicieux de considérer pour obtenir une valeur approchée de γ ?
Indiquer le nombre de termes $\dfrac{1}{k}$ nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-10}. Déterminer enfin une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

4. Donner un développement asymptotique de H_n à l'ordre 4 dans l'échelle des $(1/n)$.

Partie C : indépendante des parties précédentes

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

$$\begin{cases} a_1 \geq 1, \\ \text{la suite } (a_n) \text{ est bornée}, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0, \\ \text{la série } \sum(a_n) \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geq 2,\ b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$ ğ

1. Sans utiliser le résultat des parties A et B mais en utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, prouver que : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. (a) De façon analogue, montrer que $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$.
   (c) Retrouver le résultat de 2.b. directement.

3. <u>Un exemple.</u> On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. <u>On revient au cas général</u> et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).
   (a) Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.
   (b) Prouver que $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$
   (c) Déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

4. Soit c_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (d_n) à termes positifs tels que $d_n = o(c_n)$ et $\sum(d_n)$ diverge.

Exercice

Dans cet exercice **on ne pourra pas utiliser la formule de Stirling**.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta$.

1. On a montré en Td le résultat suivant : $\exists L$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} = e^L$.
En déduire la formule suivante $n! \sim e^{-L}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$.

2. Pour $n \geq 2$, exprimer I_n en fonction de I_{n-2}.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

4. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, et donner la valeur de cette constante.
En déduire un équivalent de I_n en fonction de n.

5. Donner une expression de I_{2n} à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$.

6. En déduire la valeur de L et conclure