DM 5

À rendre Jeudi 12 novembre 2015

Problème 1

Partie I : Étude de $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

b) À l'aide d'une suite géométrique montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx\,.$$

2) a) Par intégration par parties , montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)\,.$$

b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

3) Déterminer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Étude de $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = L + 2\,.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini .

2) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini .

b) Déterminer un équivalent de $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

3) a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

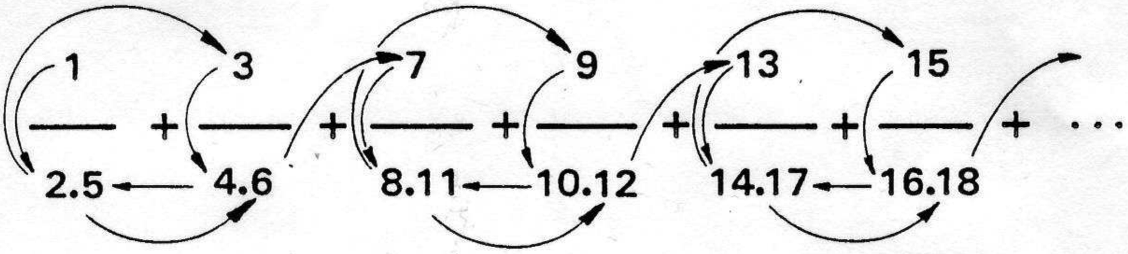
---

blème 2

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers > 0 est utilisé pour créer le terme général u_n d'une série selon la procédure périodique suivante, que l'on poursuit indéfiniment :

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{3}{4\cdot 6} + \frac{7}{8\cdot 11} + \frac{9}{10\cdot 12} + \frac{13}{14\cdot 17} + \frac{15}{16\cdot 18} + \ldots$$

Cette procédure, si l'on préfère, peut être schématisée par le système périodique de fléchage ci-dessous :



Ainsi, $u_1 = \frac{1}{2\cdot 5}$, $u_2 = \frac{3}{4\cdot 6}$, $u_3 = \frac{7}{8\cdot 11}$, $u_4 = \frac{9}{10\cdot 12}$ etc.

1 – Exprimer le terme général u_n, en distinguant les valeurs de $\boxed{u_{2k-1}}$ et $\boxed{u_{2k}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2 – Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3 – On pose $w_k = u_{2k-1} - u_{2k}$. Déterminer des constantes $\boxed{A, B, C, D}$, telles que :

$$w_k = \frac{A}{6k-4} + \frac{B}{6k-2} + \frac{C}{6k-1} + \frac{D}{6k}.$$

4 – On pose $W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$. Montrer que :

$$W_n = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{P(t)}{Q(t)}\,(1 - t^{6n})\,dt,$$

où $Q(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$, et $\boxed{P(t)}$ est un certain polynôme que l'on calculera. Pour ce faire, on pourra utiliser l'égalité : $\frac{1}{a} = \int_0^1 t^{a-1}\,dt$, $a > 0$.

5 – La formule précédente montre que la valeur de la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ est donnée par $\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$ et que le reste d'ordre n a pour expression :

$$R_n = \sum_{q=n+1}^{\infty} w_q = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{6n}\,\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt.$$

Donner un équivalent simple de R_n pour $n \to +\infty$, au moyen d'une intégration par parties.