DM n°12 Plus dur

A rendre mercredi 18 novembre 2015

SOUS-GROUPES DE $\mathbb{R}$

Preliminaires

Montrer que si E est dense dans $\mathbb{R}$, alors tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'éléments de E.
Donner des exemples d'ensembles denses dans $\mathbb{R}$ et d'ensembles non denses dans $\mathbb{R}$.

Partie I

Le but de cette première partie est d'établir le résultat suivant :
si G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors ou bien $\exists a \in \mathbb{R},\ G = a\mathbb{Z}$, ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit G un sous-groupe additif non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $G_+^* = G \cap]0, +\infty[$.

1. Montrer que $G_+^* \neq \emptyset$.
   On note $\lambda = \inf G_+^*$.
2. On suppose ici que $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Card}([\lambda, 2\lambda[\cap G_+^*) \geq 1$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Card}([\lambda, 2\lambda[\cap G_+^*) = 1$.
   (c) Montrer que $G_+^* = \lambda \mathbb{N}^*$.
   (d) Quel est alors l'ensemble G ?
3. On suppose maintenant que $\lambda = 0$.
   En supposant donnés deux réels a et b, avec $a < b$,
   (a) justifier l'existence de $t \in G_+^* \ /\ 0 < t < b - a$,
   (b) et prouver que $\exists n_0 \in \mathbb{Z} \ /\ n_0 t \in]a, b[$. Conclure.

Partie II : applications

1. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2}\ ;\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\forall \epsilon > 0,\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \ /\ |\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{\epsilon}{q}$.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{Z}[\theta] = \{p + q\theta\ ;\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ ($\mathbb{Z}[\theta]$ se note aussi $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$)
   (a) Montrer que si $\theta \notin \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Z}[\theta]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si $\theta \in \mathbb{Q}$, ($\theta = \dfrac{u}{v}$, avec $u \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$) alors $\exists c \in \mathbb{R} \ /\ \mathbb{Z}[\theta] = c\mathbb{Z}$.
   Préciser c.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ /\ 0 < x - (p + q\sqrt{2}) < \epsilon$.
   En déduire que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit H un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que ou bien $\exists \alpha > 0 \ /\ H = \{\alpha^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, ou bien H est dense dans $\mathbb{R}_+$.

5. Soit $Y = \{\cos n;\ n \in \mathbb{N}\}$ Montrer que l'ensemble Y est dense dans $[-1, 1]$?

PARTIE III : UNE EQUATION DE PELL-FERMAT

On se propose dans cette partie de déterminer $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ x^2 - 2y^2 = 1\}$.

1. Soit $G = \{x + y\sqrt{2}, \text{où}(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } x + y\sqrt{2} > 0 \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$.
   Montrer que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $G' = G \cap]1, +\infty[$.
   (a) Montrer que, pour $(x, y) \in S$, on a $x + y\sqrt{2} \in G' \iff (x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$.
   (b) Montrer que, pour $x + y\sqrt{2} \in G'$ et $x' + y'\sqrt{2} \in G'$, alors $x < x' \Longrightarrow y < y'$.
   (c) Montrer alors que G' possède un plus petit élément que l'on déterminera.
3. En déduire que tous les éléments de G sont une puissance (d'exposant entier relatif) d'un même réel.
   Donner une expression générale des éléments de $S' = S \cap \mathbb{N}^2$.
4. Sur $\mathbb{N}^2$, on définit la relation binaire $(x, y) \prec (x', y') \iff x \leq x'$ et $y \leq y'$.
   (a) Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
   (b) Cet ordre est-il total ou partiel ?
   (c) En considérant cette même relation d'ordre sur S', est-ce un ordre total ou partiel sur S' ?
   (d) Donner (pour cette relation d'ordre) les cinq premiers éléments de S'.
5. Comment enfin obtient-on les éléments de S à partir de ceux de S' ?