DM n°4

à rendre mercredi 14 octobre 2015

Les questions marquées d'un (*) sont facultatives

Problème

Le but du problème est d'étudier la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_0 = id_{\mathbb{R}}$ et $f_{n+1} = \frac{1}{n+1}(\exp) \circ (f_n)$, et ainsi $u_n = f_n(u_0)$.

I. Préliminaires

1. Montrer que $\forall x \geq 3, e^x > (x+1)^2$
2. (a) Étudier les variations de $g_n : x \rightarrow \frac{1}{n+1}e^x - x$.
(b) En considérant g_0 et g_1 , comparer u_0, u_1, u_2 .
3. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer f'_n en fonction des f_k . En déduire que f_n est strictement croissante.
(b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n a une limite finie, qu'on notera α_n , quand x tend vers $-\infty$.
Donner une relation de récurrence définissant α_n .
(c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
(d) Déterminer I_n tel que $f_n : \mathbb{R} \rightarrow I_n$ soit bijective.
(e) Montrer que f_n^{-1} est de classe C^1 sur I_n .

4. Rappel d'une définition : L'intervalle I est stable par l'application φ si et seulement si $\varphi(I) \subset I$.

Pour quels couples $(p, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $] -\infty, M]$ est-il stable par $\frac{1}{p}exp$?

II. Variations et convergence de (u_n) .

1. (a) Montrer que $u_p \geq u_{p+1} \implies u_{p+1} > u_{p+2}$
(b) Montrer que la suite (u_n) est soit strictement croissante, soit strictement décroissante à partir d'un certain rang.
(c) Quelles sont les éventuelles limites possibles de (u_n) ?
2. En donnant des valeurs approchées de α_3 et α_4 , justifier l'existence d'un $u_0 \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) n'est pas croissante.
Dans la suite du problème **on note C l'ensemble des $u_0 \in \mathbb{R}$ tels que (u_n) converge, et on note D le complémentaire de C dans $\mathbb{R}$: $D = \mathbb{R} \setminus C$**
3. (a) Montrer que C n'est pas vide. Vérifier à la calculatrice que $u_0 = 0,31$ est dans C (on veut voir les différents résultats numériques).
(b) Si $u_0 \in C$, que vaut $\lim u_n$? Montrer que $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$
(c) Montrer que (α_n) converge, et donner sa limite.
(*) Donner un développement limité de u_n d'ordre 3.

4. (a) On suppose que (u_n) est croissante. Montrer que $u_0 \in D$.
 (b) Montrer que pour $p \geq 3$, $u_p \geq p \implies u_{p+1} \geq p+1$.
 (c) A l'aide de f_3 , montrer que D n'est pas vide. Montrer que $u_0 = 0, 32$ est dans D .
5. (*) (a) On suppose qu'il existe $p \geq 3$ tel que $u_p \geq p$. Montrer que $n = o(u_n)$.
 (b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : '
 - (a) $\exists p \geq 3, u_p \geq p$
 - (b) $\forall k, q \in \mathbb{N}, u_n \gg e_k(n+q)$ où $e_k = \exp \circ \exp \circ \dots \circ \exp$ (k termes avec $k \geq 1$) et $e_0 = id_{\mathbb{R}}$
6. (*) Montrer que C et D sont des intervalles de $\mathbb{R}$, et qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ à la fois borne supérieure de C et borne inférieure de D .
7. (*) (a) Donner un encadrement de β
 (b) À l'aide d'une suite $(u_0(p))_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers β et des suites $(u_n(p))$ associées, montrer que $\beta \in D$.

Exercice

1. Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$
2. Discuter selon la valeur du réel α la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$