DS n°4 PLUS DUR

mercredi 2 décembre 2015 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Préliminaire : Suites de Cauchy et espace de Banach

Soit E un evn, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dira que cette suite est de Cauchy si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,p\in\mathbb{N},\ n\geqslant N \text{ et } p\geqslant N \Longrightarrow \|u_n-u_p\|\leqslant\varepsilon$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors cette suite est bornée.

3. Montrer que si E est de dimension finie alors toute suite de Cauchy est convergente.

4. Dans cette question, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$).
On le munit de la norme infinie : $\|f\|_\infty=\mathrm{Sup}\{|f(x)|\,/x\in[a,b]\}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E,\|\ \|_\infty)$. On va montrer que cette suite converge dans E pour la norme infinie

   (a) Soit $x\in[a,b]$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente. Notons $\ell(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction $\ell:[a,b]\to\mathbb{R}$.

   (b) Après avoir justifié que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme infinie, montrer que la fonction ℓ est bornée sur $[a,b]$

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-\ell\|_\infty=0$ (ici on travaille sur l'espace vectoriel $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$

   (d) Enfin, montrer que $\ell\in E$.

   (e) Conclure

**Un espace vectoriel normé dont toutes les suites de Cauchy convergent est appelé espace de Banach.
On vient de montrer que $\mathbb{R}$ est un espace de Banach, de même que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$.
L'intérêt de montrer que dans un espace de Banach une suite est de Cauchy c'est de prouver ainsi la convergence de cette suite, sans avoir besoin de connaître sa limite.**

Soit E un espace de Banach.
Si A est une partie de E on note $\overline{A}$ son adhérence, $\overset{o}{A}$ son intérieur, $\partial A=\overline{A}\backslash\overset{o}{A}$ sa frontière, et on note $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$ sa distance à un point $x\in E$. On note respectivement $B(x,r)=\{y\in E;\|y-x\|<r\}$ et $\overline{B}(x,r)=\{y\in E;\|y-x\|\leqslant r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r.
Etant données deux parties A et B de E, et une application $f:A\to B$, on rappelle que $x\in E$ est un *point fixe* de f si c'est une solution de l'équation $x=f(x)$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k\in[0,1[$, c'est à dire s'il existe un réel $k<1$ tel que pour tous $x,y\in A$,

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|x-y\|.$$

On rappelle qu'un application lipschitzienne est continue.

Dorénavant et **dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide de E.**

A. Théorème du point fixe

Dans cette partie on établit le

Théorème de Picard. *Toute application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*

Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1. Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ce est unique.

2. Soit $a \in A$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$.
   Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3. Conclure.

B. Invariance par homotopie

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont *homotopes*, c'est à dire qu'il existe une application $h : A \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$ on a $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$, et qui vérifie en outre les propriétés suivantes :

$\boxed{\text{a}}$ il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in A$ et tout $t \in [0,1]$ on a : $\|h(x,t) - h(y,t)\| \leqslant k\|x-y\|$

$\boxed{\text{b}}$ il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tous $t, u \in [0,1]$, $\|h(x,t) - h(x,u)\| \leqslant k' \, |t-u|$

$\boxed{\text{c}}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial A$, on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose

$$T = \{t \in [0,1]; \exists x \in A, x = h(x,t)\}$$

4. Vérifier que T est non vide

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers un réel $t \in [0,1]$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

5. Vérifier qu'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tous entiers naturels n et m, on a :
   $\|x_n - x_m\| \leqslant \dfrac{k'}{1-k} \, |t_n - t_m| \, .$

6. Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en déduire que T est fermée.

Soit encore $t \in T$ et $x \in A$ tels que $x = h(x,t)$.

7. Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$.

Soit r et ε deux nombres réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant \dfrac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x, \partial A)$, et soit $u \in [0,1]$ tel que $|t-u| < \varepsilon$.

8. Montrer que pour tout $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$ on a $\|x - h(y,u)\| \leqslant r$.

9. En déduire, en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'aplication $y \to h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

10. en déduire que T est un ouvert relatif à $[0,1]$. Conclure alors que g possède un unique point fixe intérieur à A (on pourra considérer une borne supérieure de T).

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ admet un point fixe, mais on fait les trois hypothèses suivantes :

$\boxed{\text{d}}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A.

$\boxed{\text{e}}$ l'image $f(A)$ de A par f est bornée.

$\boxed{\text{f}}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq tf(x)$.

11. Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. Étude de certains opérateurs à noyau

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et un réel $K_0 > 0$ vérifiant pour tous (t, u) et (t, v) dans $[a, b] \times D$,

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant K_0 \, |u - v| \, .$$

L'espace de Banach $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est muni de la norme infinie $\|\varphi\| = \underset{t\in[a,b]}{sup} |\varphi(t)|$.
Soit $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application F de $\mathcal{C}([a, b])$ dans lui-même par la formule :

$$F(\varphi)(t) = \int_a^b K(t,x) f(x, \varphi(x)) dx$$

et on pose $\alpha = \sup\limits_{t\in[a,b]} \displaystyle\int_a^b |K(t,x)| \, dx$.

12. Pour toutes fonctions $y, z \in \mathcal{C}([a, b])$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, on a $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, démontrer l'inégalité
$$\|F(y) - F(z)\| \leqslant \alpha K_0 \|y - z\|.$$

Soit A une partie fermée et bornée de $\mathcal{C}([a, b])$ contenant la fonction nulle dans son intérieur et telle que pour tous $\varphi \in A$ et $t \in [a, b]$, on a $\varphi(t) \in D$. On suppose en outre que $\alpha K_0 < 1$ et que pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.

13. Montrer que F admet un unique point fixe intérieur à A.

D. une généralisation

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que
$\boxed{\text{g}}$ le vecteur nul est intérieur à A;
$\boxed{\text{h}}$ l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact;
$\boxed{\text{i}}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $x \neq tf(x)$.
Onpose

$$X = \{x \in A ; \exists t \in [0,1], x = tf(x)\}.$$

14. Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0, 1]$ définie par la formule
$$\mu(x) = \frac{d(x, \partial A)}{d(x, \partial A) + d(x, X)}$$
est bien définie et continue.
Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \mu(x) f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C \backslash A \end{cases}$$

15. Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le

Théorème (Schauder). Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.

16. Conclure à l'aide du théorème de Schauder que f admet un point fixe intérieur à A.