DS n°4

mercredi 2 décembre 2015 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

Vrai ou Faux ? Si c'est vrai le justifier soigneusement, si c'est faux donner un contre exemple.
Soit E un espace vectoriel normé.

1. Le complémentaire d'une partie dense dans E est dense dans E.
2. Une réunion de parties dense dans E est dense dans E.
3. Une intersection de parties dense dans E est dense dans E.
4. L'image d'une partie dense dans E par une application continue est dense dans E.
5. Un compact de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
6. Un compact auquel on ajoute un nombre fini de points est encore un compact.
7. Ici E est de dimension finie et $f \in L(E, \mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un fermé de E.
8. Ici E est de dimension finie et $f \in L(E, \mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un compact de E.

Exercice 2 : distance entre deux parties

Soit E un evn, et K_1 et K_2 deux compacts de E.

1. (a) Est-ce que $K_1 \times K_2$ est un compact de E^2 ? Préciser votre réponse.
   (b) Montrer qu'il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tq $\|x_1 - x_2\| = Inf\{\|x - y\|/x \in K_1, y \in K_2\}$.
2. Ici $E = \mathbb{R}^n$, F une partie fermée et non bornée de E. Soit alors $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur F telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$
   (a) Soit $a \in F$. Notons alors $\Gamma = \{x \in F/f(x) \leqslant f(a)\}$. Montrer que Γ est un compact de F.
   (b) Montrer qu'il existe b dans Γ tel que $f(b) = Inf\{f(x)/x \in \Gamma\}$
   (c) Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $f(y) = Inf\{f(x)/x \in F\}$

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier la parité de f.

3. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ admet une infinité de maximums relatifs (resp. de minimums relatifs) en des points que l'on peut représenter par les termes d'une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(y_n)_{n\geqslant 1}$) On pose $\forall n \geqslant 1,\ a_n = f(x_n)$ et $b_n = f(y_n)$.

4. Étudier que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

5. Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Partie B

1. Soit $a > 0$. Démontrer que $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_a^x \sin(t^2)dt = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} - \frac{1-\cos(a^2)}{2a} + \int_a^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$

2. Justifier l'existence pour tout réel x de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$.

3. Montrer que la fonction $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$.
   En déduire que la fonction $x \to \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$ est majorée sur $[0,+\infty[$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt$.

Partie C

On se propose de déterminer une valeur approchée du nombre a_1 défini dans la partie A.

1. Soit g la fonction définie sur $[0,\sqrt{\pi}\ ]$ par : $\forall t \in [0\sqrt{\pi}\ ],\ g(t) = \sin(t^2)$.
   Déterminer un majorant M_2 de $\{|g''(t)|\,/t \in [0,\sqrt{\pi}\ ]\}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On partage $[0,\sqrt{\pi}\ ]$ en k intervalles de même longueur, et on pose $\forall i \in \{0,..,k\},\ \alpha_i = \dfrac{i\sqrt{\pi}}{k}$
   On a alors $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)dt$.
   On pose pour tout $i \in \{0,...,k-1\}$, $\beta_i = \dfrac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$ et on se propose de prendre comme valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)dt$ l'intégrale $I(k)$ telle que $I(k) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t)dt$ où φ est la fonction en escalier telle que :
   $\forall i \in \{0,...,k-1\},\ \forall t \in [\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\ \varphi(t) = g(\beta_i)$ et $\varphi(\sqrt{\pi}) = g(\sqrt{\pi})$.
   (a) Exprimer $I(k)$ en fonction de k et des nombres β_i.
   (b) Justifier pour tout $i \in \{0,...,k-1\}$ l'égalité :
   $\forall t \in [\alpha_i,\alpha_{i+1}],\ g(t) = g(\beta_i) + (t-\beta_i)g'(\beta_i) + \displaystyle\int_{\beta_i}^t (t-u)g''(u)du$.
   (c) En déduire que l'on a : $\left|\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)dt - I(k)\right| \leqslant \dfrac{M_2\pi\sqrt{\pi}}{24k^2}$