

DS n°4

mercredi 26 novembre 2014 (durée 4 heures)

Sujet plus dur pour Fiévet, Gonin, Lallier, Maxime Mazouth, Tran Ba, Viennot

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété (P) si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

- (a) Quelles sont les fonctions constantes qui vérifient (P) ?
(b) Soit f une fonction vérifiant (P) . Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
Dorénavant On suppose ici que f vérifie (P) et n'est pas la fonction nulle.
- Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f .
- Soit $a > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(na)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on ne demande pas l'expression de $f(na)$ en fonction de $f(a)$).
- Soit $a > 0$. Dans cette question on suppose que $\forall x \in [0; a], f(x) > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f\left(p \frac{a}{2^q}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}$.
- Soit $a > 0$ et $x \geq 0$. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}, I_q = \{p \in \mathbb{N} / p \cdot \frac{a}{2^q} \leq x\}$ possède un plus grand élément qui sera noté p_q .
On pose alors, pour tout entier $q, u_q = p_q \cdot \frac{a}{2^q}$. Montrer que la suite $(u_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers x .
- On suppose maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
 $\forall x \in [0; a], f(x) > 0$.
 - Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(x)$ pour tout x réel.
 - On suppose que $f(a) = 1$. Déterminer f .
 - On suppose que $f(a) < 1$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(\alpha x)$.

Exercice 2

Soit K une partie compacte de l'espace vectoriel normé E de dimension finie et soit f une application de K dans K telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

- (a) Montrer qu'il existe un c dans K tel que $\|c - f(c)\| = \inf\{\|x - f(x)\| / x \in K\}$
(b) Montrer que c est l'unique point fixe de f dans K (on pourra considérer $\|b - f(b)\|$ avec $b = f(c)$)
- Pour $a \in K$ on construit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$$

le but de la question est de montrer que cette suite converge vers c .

- (a) Posons $u_n = \|c - a_n\|$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = c$, conclure.
- (b) Sinon, étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle converge vers ℓ .
- (c) En supposant $\ell > 0$, et en utilisant le fait que la suite (a_n) est une suite d'un compact, aboutir à une absurdité.
- (d) Conclure

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On dira que f est absolument monotone (en abrégé AM) sur I si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$$

1. (a) Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont absolument monotones :
 $x \rightarrow \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, $x \rightarrow \cosh(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on note $\cosh$ la fonction cosinus hyperbolique), $x \rightarrow -\frac{1}{x}$ sur $] -\infty, 0[$
- (b) Soient f et g deux fonctions AM définies sur I . Montrer que $f + g$ et fg sont AM sur I .
- (c) soit f est une fonction AM sur I . On considère la fonction $g = e^f$
Calculer g' et en déduire pour tout entier $n \geq 1$, une expression de $g^{(n)}$ faisant intervenir les dérivées successives de g et de f . Démontrer que g est absolument monotone sur I .
- (d) Montrer que la fonction $\tan$ est AM sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. (a) On considère la fonction f définie sur $] -1, +1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f est infiniment dérivable et que $f^{(n)}$ s'écrit sous la forme $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec P_n polynôme à coefficients réels.
- (b) Étudier la parité de P_n .
- (c) Vérifier que pour tout $x \in] -1, +1[$, $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$
- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}$ et $P'_n = n^2P_{n-1}$.
- (e) Montrer que Arcsin est AM sur $]0, 1[$.
3. Dans cette question on suppose que f absolument monotone sur $]a, b[$ avec a et b réels.
 - (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \lim_{a^+} f$
 - (b) On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrer que f est dérivable à droite en a et que f' est continue à droite en a .
 - (c) Montrer que f ainsi prolongée est une fonction absolument monotone sur $[a, b[$.
 - (d) Le même phénomène se produit-il en b ?
4. On suppose ici que $-\infty < a < 0 < b < +\infty$. Soit f absolument monotone sur $]a, b[$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.
 - (a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégrale (sans oublier ses hypothèses).
 - (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.
 - (c) Montrer que la fonction $x \rightarrow \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, b[$.
 - (d) Justifier que $\forall x \geq 0$, la série $\sum \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ converge vers $f(x)$ (on pourra prendre $0 < x < y < b$ et montrer que $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$)
 - (e) Montrer que pour tout $c \in]a, b[$, la série $\sum \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n)}(c)$ converge vers $f(x)$ pour $x \geq c$.
 - (f) En déduire que s'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$ alors $\forall x > a, f(x) = 0$.