DS n°4

mercredi 26 novembre 2014 (durée 4 heures)

Sujet normal

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 :

On s'intéresse ici aux fonctions f continues en tout point où elles sont définies et vérifiant la relation

$$\forall (x,y), \quad f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

1. (a) Montrer que si f est définie en 0 alors f est la fonction nulle.
   A partir de maintenant on suppose que f n'est pas la fonction nulle, ce qui revient à dire que f n'est pas définie en 0, et on suppose alors que (1) est vraie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$.
   (b) Déterminer $f(1)$ et $f(-1)$.
   (c) Montrer que f est paire. On ne s'intéressera alors qu'aux valeurs de $f(x)$ pour $x > 0$.
   (d) Exprimer $\forall x > 0, f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$
2. Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) = 1$.
3. Déterminer $f(x)$ pour $x = a^r$ avec $r \in \mathbb{Q}$.
4. (a) Determiner le réel u tel que $x = a^u$.
   (b) Á l'aide d'une suite de rationnels convergeant vers u, déterminer $f(x)$ pour $x > 0$.
5. Conclure (penser à la réciproque).

Exercice 2

Soit K une partie compacte de l'espace vectoriel normé E de dimension finie et soit f une application de K dans K telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. (a) Montrer que $x \to \|x - f(x)\|$ est continue sur K.
   (b) Montrer qu'il existe un c dans K tel que $\|c - f(c)\| = \inf\{\|x - f(x)\| \ /\ x \in K\}$
   (c) Montrer que c est l'unique point fixe de f dans K (on pourra considérer $\|b - f(b)\|$ avec $b = f(c)$)
2. Pour $a \in K$ on construit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$a_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$$

   le but de la question est de montrer que cette suite converge vers c.

   (a) Posons $u_n = \|c - a_n\|$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = c$, conclure.
   (b) Sinon, étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle converge vers ℓ.
   (c) En supposant $\ell > 0$, et en utilisant le fait que la suite (a_n) est une suite d'un compact, aboutir à une absurdité.
   (d) Conclure

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On dira que f est absolument monotone (en abrégé AM) sur I si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

1. (a) Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont absolument monotones :
   $x \to exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, $x \to cosh(x)$ sur $\mathbb{R}$ (on note $cosh$ la fonction cosinus hyperbolique)
   $x \to -\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$

   (b) Soient f et g deux fonctions AM définies sur I. Montrer que $f+g$ et fg sont AM sur I.

   (c) soit f est une fonction AM sur I. On considère la fonction $g = e^f$

   i. Calculer g' et en déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de $g^{(n)}$ faisant intervenir les dérivées successives de g et de f.

   ii. Démontrer que g est absolument monotone sur I.

   (d) Montrer que la fonction tan est AM sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$.

2. (a) On considère la fonction f définie sur $]-1,+1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f est infiniment dérivable et que $f^{(n)}$ s'écrit sous la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec P_n polynôme à coefficients réels.

   (b) Étudier la parité de P_n.

   (c) Vérifier que pour tout $x \in]-1,+1[$, $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}$ et $P_n' = n^2 P_{n-1}$.

   (e) Montrer que $Arcsin$ est AM sur $]0,1[$.

3. Dans cette question on suppose que f absolument monotone sur $]a,b[$ avec a et b réels.

   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \lim\limits_{a^+} f$

   (b) On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrer que f est dérivable à droite en a et que f' est continue à droite en a.

   (c) Montrer que f ainsi prolongée est une fonction absolument monotone sur $[a,b[$.

   (d) Le même phénomène se produit-il en b ?

4. On suppose ici que $-\infty < a < 0 < b < +\infty$. Soit f absolument monotone sur $]a,b[$. On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

   (a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégrale (sans oublier ses hypothèses).

   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.

   (c) Montrer que la fonction $x \to \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0,b[$.

   (d) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) \leqslant f(x)$.
   Justifier que $\forall x \geqslant 0$, la série $\sum \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ converge. Soit $g(x)$ sa somme.
   Prouver que $g = f$ sur $[0,b[$ (on pourra prendre $0 < x < y < b$ et montrer que $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^n f(y)$)