MP 2014-2015

DN 1

À rendre Mercredi 10 septembre 2014

PROBLÈME 1

Définitions et notations : on désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers : $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$.
Si n et p sont deux entiers naturels, on note $n \mid p$ lorsque n divise p.

On désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels. On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & \star & \star \\ \star & b & \star \\ \star & \star & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le réel $a+b+c$ est appelé trace de M et noté $\operatorname{tr}(M)$.

Les parties de ce problème sont dépendantes mais le candidat pourra admettre les résultats qui y sont montrés pour aborder une partie suivante.

Théorème de Fermat

1) Soit $p \in \mathscr{P}$ et soit k entier avec $1 \leq k \leq p-1$. Montrer que :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$

et en déduire que :

$$p \mid \binom{p}{k}$$

2) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid (a^p - a)$$

On pourra raisonner par récurrence sur a.

3) On note, pour M dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M)$ le déterminant de M. Montrer que si M est à coefficients entiers, $\det(M)$ est un entier.

Montrer que les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients entiers qui vérifient

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid \det(M^p)$$

sont exactement les matrices non inversibles à coefficients entiers.

Étude d'un ensemble de matrices

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

4) Montrer que $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est la dimension de cet espace ?

5) Montrer que $\mathscr{A}$ est un anneau commutatif.

Dans la suite de ce problème, on désigne par M la matrice : $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathscr{A}$.

7) Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

III Etude du noyau.

9) Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

10) Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

11) En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

12) Déduire de la question 10) que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P(X))+k \leq n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

13) On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à n-d tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

14) On suppose dans cette question que $T(X) = X^3+X^2-1$. Donner le noyau de f.

IV Etude d'un produit scalaire.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considérera $g = f_2$ la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.

15) Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

16) Soit $<.,.>$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2, <U(X), V(X)> = U(1)\times V(1)+U'(1)\times V'(1)+U''(1)\times V''(1)$.
(Où $U'(X)$ et $V'(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées de $U(X)$ et $V(X)$ et $U''(X)$ et $V''(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées secondes de U et V.)

Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

17) Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale. (C'est-à-dire $A\times {}^tA=I_3$ où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité.)

18) L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $<.,.>$? On pourra calculer $<1, 1>$ et $<g(1), g(1)>$.

Problème 2.

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d'un polynôme $P(X)$.

I Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème. Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$). On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

3) Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

a) Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

4) Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X-1-i)(X+i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$ par l'application f.

II Etude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3+X^2+a$.

5) Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

6) Calculer le déterminant de f_3.

7) Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

8) Dans cette question $a = -1$.

a) Donner une base de $\ker f_3$, le noyau de f_3.

b) Donner une base de $\operatorname{Im} f_3$, l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

Étude d'une suite

Dans cette partie, on désigne par u la suite définie par :

$$u_0 = 3, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 4, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

On se propose de montrer que $\forall p \in \mathscr{P},\ p \mid u_p$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

8) Justifier, pour $k \in \mathbb{N}$, l'existence de a_k, b_k et c_k.

9) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) seule et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

10) En déduire, pour k dans $\mathbb{N}$, a_k en fonction de k.

11) Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$ avec $i^2 = -1$.
Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k. En déduire une expression de b_k en fonction de k.

12) Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_k).

13) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathrm{tr}(M^n)$$

14) Montrer que :

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid u_p$$

Étude d'un coefficient

Dans cette partie, on pose $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (2, 1, 0)$ et $e_3 = (-1, 1, 2)$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel :
si $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ sont dans $\mathbb{R}^3$, on pose $(X|X') = xx' + yy' + zz'$.
Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on pose $c(u) = (u(e_1)|e_1) + (u(e_2)|e_2) + (u(e_3)|e_3)$.

15) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}$.

Jusqu'à la fin de ce problème, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des entiers naturels.

16) Que vaut $c(u)$ et plus généralement $c(u^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$?

17) On suppose que :

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid c(u^p)$$

En utilisant la question 2) montrer que u est nul.