

# DS n°6

mercredi 21 janvier 2015 (durée 4 heures)

## Sujet normal

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

Les calculatrices sont autorisées

### I. EXERCICE I

Soit les suites réelles  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

#### I.1.

**I.1.a** Justifier sans calcul que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est diagonalisable.

**I.1.b** Diagonaliser la matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**I.1.c** Déterminer la matrice  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On pourra utiliser la calculatrice.

**I.2.** Expliciter les termes  $u_n, v_n, w_n$  en fonction de  $n$ .

### II. EXERCICE II

Soit  $n$  un entier supérieur à 2 et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n$ . On appelle projecteur de  $E$ , tout endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant  $p \circ p = p$ .

**II.1.** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

**II.1.a** Démontrer que les sous-espaces vectoriels  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**II.1.b** En déduire que la trace de  $p$  (notée  $\text{Tr}(p)$ ) est égale au rang de  $p$  (noté  $\text{rg}(p)$ ).

**II.1.c** Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $\text{Tr}(u) = \text{rg}(u)$  est-il nécessairement un projecteur de  $E$  ?

**II.2.** Donner un exemple de deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de rang 1 telles que  $A$  soit diagonalisable et  $B$  ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

**II.3.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1.

**II.3.a** Démontrer qu'il existe une base  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $\text{Mat}_\beta(u)$  de  $u$  dans  $\beta$  soit de la forme :

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où  $a_1, \dots, a_n$  sont  $n$  nombres réels.

**II.3.b** Démontrer que  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, la trace de  $u$  est non nulle.

**II.3.c** On suppose que  $\text{Tr}(u) = \text{rg}(u) = 1$ . Démontrer que  $u$  est un projecteur.

**II.3.d** Soit la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $A$  est la matrice d'un projecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont on déterminera l'image et le noyau.

### III. PROBLÈME

#### Notations et rappels

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont les réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dans cet ordre. Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  ${}^tM$  sa transposée.

On munit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique noté  $\langle | \rangle$  et de la norme euclidienne  $\| \cdot \|$  associée. on note  $\mathcal{S}(E)$  le sous-espace des endomorphismes symétriques de  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes  $s$  de  $E$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x)|y \rangle = \langle x|s(y) \rangle$ .

Un endomorphisme symétrique  $s$  de  $E$  est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :  $\forall x \in E, \langle s(x)|x \rangle \geq 0$  (respectivement  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle s(x)|x \rangle > 0$ ).

Une matrice symétrique  $S$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique positive (resp. symétrique définie positive) si :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$  (respectivement  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$ ).

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On rappelle qu'un endomorphisme  $s$  de  $E$  est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de  $E$  est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs  $a_1, \dots, a_n$ ,

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{inégalité arithmético-géométrique}).$$

#### Objectif du problème

On se donne une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  ( ou  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  ) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire  $A \mapsto \text{Tr}(AS)$  sur des ensembles de matrices.)

## Questions préliminaires

### III.1.

**III.1.a** Énoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien  $E$  et sa version relatives aux matrices symétriques réelles.

**III.1.b** Toute matrice symétrique à coefficients à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable? On pourra par exemple considérer la matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

**III.2.** Soit  $s \in \mathcal{S}(E)$ , de valeurs propres (réelles)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit  $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base orthonormée de  $E$  telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_i$  est un vecteur propre associée à la valeur propre  $\lambda_i$ . Pour tout vecteur  $x \in E$ , on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle.$$

**III.2.a** Exprimer  $R_s(x)$  à l'aide des  $\lambda_i$  et des coordonnées de  $x$  dans la base  $\beta$ .

**III.2.b** En déduire l'inclusion :  $R_s(S(0, 1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$  où  $S(0, 1)$  désigne la sphère unité de  $E$ .

### III.3.

**III.3.a** On suppose dans cette question que  $s$  est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de  $s$  sont toutes positives (respectivement strictement positives).

**III.3.b** Soit  $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note  $s$  l'endomorphisme de  $E$  représenté par  $S$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Exprimer le terme général  $s_{i,j}$  de  $S$  comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

## Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**III.4.** Démontrer que l'application  $M \mapsto {}^t M M - I_n$  est continue dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**III.5.** Justifier que, si  $A = (a_{i,j})$  est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

**III.6.** En déduire que le groupe orthogonal  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**III.7.** Soit  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , de valeurs propres (positives)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On pose  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Si  $A$  est une matrice orthogonale, on note  $T(A)$  le nombre réel  $T(A) = \text{Tr}(AS)$ .

**III.7.a** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale  $B$  telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

**III.7.b** Démontrer que l'application  $T$  de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  admet un maximum sur  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , que l'on notera  $t$ .

**III.7.c** Démontrer que, pour toute matrice orthogonale  $A$  de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $T(A) \leq \text{Tr}(S)$ , puis déterminer le réel  $t$ .

## Inégalité d'Hadamard

Soit  $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , de valeurs propres (réelles positives)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

**III.8.** Démontrer l'inégalité valable pour tout  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  :

$$\det(S) \leq \left( \frac{1}{n} \text{Tr}(S) \right)^n \quad (*).$$

**III.9.** Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $S_\alpha = {}^t DSD$ . Démontrer que  $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et calculer  $\text{Tr}(S_\alpha)$ .

**III.10.** Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux  $s_{i,i}$  de  $S$  sont strictement positifs et, pour  $1 \leq i \leq n$ , on pose  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$ . En utilisant (\*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

**III.11.** Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on pose  $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$ . Démontrer que  $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$ , puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard})$$

## Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , de valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ , et  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Soit  $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que  $S = \Omega \Delta^t \Omega$ . On désigne par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  de déterminant égal à 1.

**III.12.** Démontrer que, pour tout  $A \in \mathcal{U}$ , la matrice  $B = {}^t \Omega A \Omega$  est une matrice de  $\mathcal{U}$  vérifiant :

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$$

**III.13.** Démontrer que  $\{\text{Tr}(AS)/A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta)/B \in \mathcal{U}\}$ , puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera  $m$ .

**III.14.** Démontrer que, si  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$  :  $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} (b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{\frac{1}{n}}$ .

**III.15.** En déduire que, pour  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$ ,  $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{\frac{1}{n}}$ .

**III.16.** Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on pose  $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{\frac{1}{n}}$  et  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Déterminer le réel  $m$ .