DM n°3

À rendre mercredi 1 octobre 2014

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Rappel Si F est un espace vectoriel, une partie A de F est dite sous-espace affine de F lorsque $\exists a \in A$, $\exists G$ sous espace vectoriel de F tels que $A = a + G$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 2$. Etant donnés deux endomorphismes u et v de E, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. A tout endomorphisme f de E, on associe l'endomorphisme θ_f de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \theta_f(g) = [f, g]$. (Attention, $\theta_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$).

Partie A

Un endomorphisme u de E est dit *nilpotent* lorsque $\exists s \in \mathbb{N},\ u^s = 0$. Pour u endomorphisme nilpotent différent de l'endomorphisme nul, on appelle *indice de nilpotence de* u l'entier p tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nul étant égal à 1 par convention.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent non nul et p son indice de nilpotence. Soit $x \in E,\ u^{p-1}(x) \neq 0$.
   Montrer que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.
2. Qu'en déduit-on comme relation entre p et n ?

Partie B

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et (u_0, v_0) un couple d'endomorphismes de E vérifiant la condition $[u_0, v_0] = \alpha u_0$.

1. Etablir la formule $\forall (f, g, h) \in (\mathcal{L}(E))^3,\ [f \circ g, h] = f \circ [g, h] + [f, h] \circ g$.
2. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N},\ [u_0^k, v_0]$ en fonction de u_0, de k et de α.
   Interpréter ce résultat à l'aide de l'endomorphisme θ_{v_0}.
3. En déduire que u_0 est un endomorphisme nilpotent.

Partie C

Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égal à n, où n est la dimension de E. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(u^k(a))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E. On note $\mathcal{B}$ cette base.
   Préciser la matrice N de u dans $\mathcal{B}$ et calculer N^r, pour $r \in \mathbb{N}$.
2. Soit $W_\alpha = \{w \in \mathcal{L}(E),\ [u, w] = \alpha u\}$.
   (a) Prouver que $w \in W_\alpha$ si et seulement si
   $$\exists (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}),\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ w(u^k(a)) = (\lambda_0 - \alpha k) u^k(a) + \sum_{i=k+1}^{k+n-1} \lambda_{i-k} u^i(a).$$

(b) En étudiant la matrice dans $\mathcal{B}$ des éléments w de W_α, montrer que W_α est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ de dimension n.

(c) Montrer que tous les éléments de W_α sont diagonalisables.

3. Soit w un élément fixé de W_α.
Montrer que l'ensemble $V_\alpha = \{v \in \mathcal{L}(E),\ [v, w] = \alpha v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ dont on donnera la dimension (on cherchera la matrice d'un élément v de V_α dans une base dans laquelle la matrice de w est diagonale).

Partie D

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que u est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à 2.

1. Montrer que $\dim \ker u = 2$.
2. Construire une base $\mathcal{B}_0$ de E dans laquelle la matrice de u soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que l'ensemble $W_1 = \{w \in \mathcal{L}(E)\ [u, w] = u\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la dimension (on cherchera la matrice d'un élément w de W_1 dans la base $\mathcal{B}_0$).
4. Les éléments de W_1 sont-ils tous diagonalisables ?

Partie E

On revient au cas général où $\dim E = n$. Soit u un endomorphisme nilpotent non nul de E, d'indice de nilpotence égal à p, avec $p \geq 2$.

1. Prouver qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre.
En déduire que $\theta_u \neq 0$.
2. Etablir la formule
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (\theta_u)^k(f) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} u^{k-j} \circ f \circ u^j.$$
En déduire que θ_u est nilpotent.
3. Etant donné $g \in \mathcal{L}(E)$, endomorphisme de rang r, construire $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f \circ g = g$ (on pourra considérer deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ telles que $\underset{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}{\mathrm{mat}}\, g$ est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$).
En déduire que $u^{p-1} \in \mathrm{Im}(\theta_u^{2p-2})$.
4. Et donner enfin l'indice de nilpotence de θ_u.