DM n°6

A rendre mercredi 3 décembre 2014

Problème: Une équation fonctionnelle

L'objet de ce problème est l'étude des fonctions d'une variable réelle vérifiant une relation de la forme

$$f(x+1) - f(x-1) = \lambda f'(x) .$$

Pour tout entier positif ou nul k, on désigne par $C^k(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes de classe C^k d'une variable réelle.

On note Δ l'endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$ défini par

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x-1) ;$$

pour tout nombre complexe non nul λ, on pose

$$E_\lambda = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \Delta f = \lambda f'\}$$

Si $f \in C^0(\mathbb{R})$, on appelle translatée de f toute application de la forme $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_a(x) = f(x+a)$ où a est un réel fixé.

Partie I

1) Soit f un élément de E_λ.

- ***a)*** Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ***b)*** Exprimer les dérivées successives de f comme combinaison linéaire de ses translatées.

2) Déterminer les fonctions polynômiales f appartenant à E_λ.
[on pourra développer $f(x+1)$ et $f(x-1)$ à l'aide de la formule de Taylor appliquée au moyen des dérivées successives de f en x]

Partie II

Pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ on note $J(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+t)\, dt .$$

3) ***a)*** Etant donné un entier $k \geq 0$, démontrer que

$$J(C^k(\mathbb{R})) \subset C^{k+1}(\mathbb{R})$$

- ***b)*** Ecrire une relation simple entre Δf et $J(f')$ lorsque $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Comparer $J(f')$ et $(J(f)))'$.

4) On fixe un nombre complexe μ.

- ***a)*** Démontrer que, si $|\mu| > 1$, la seule fonction continue bornée f vérifiant $J(f) = \mu f$ est la fonction nulle.
[On pourra poser $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ pour toute fonction bornée f].
- ***b)*** On suppose $|\mu| > 1$. Quels sont les éléments f de $E_{2\mu}$ tels que f' soit bornée ?
- ***c)*** Montrer que, pour tout $\mu \in]1, +\infty[$, $E_{2\mu}$ contient deux fonctions de la forme $x \mapsto e^{Kx}$, où K est un nombre réel non nul.

Partie III

5) On se propose de déterminer les fonctions h bornées de $C^0(\mathbb{R})$ vérifiant $J(h) = h$. Etant donnée une telle fonction h, on définit une suite de fonctions u_n par

$$u_0(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |h(x+t) - h(x)|^2\, dt$$

$$u_n = J(u_{n-1}) \qquad \forall n \geq 1\ .$$

***a*)** Vérifier que, pour $u,\, v \in \mathbb{R}$:

$$|h(u) - h(v)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |h(u+t) - h(v+t)|^2 dt$$

Indication : on appliquera l'inégalité de Cauchy-Schwarz

***b*)** En déduire que l'on a $u_1 \geq u_0$ (les 3/2 admettront ce résultat)

***c*)** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

***d*)** Comparer u_0 à $J(|h|^2) - |h|^2$.

***e*)** Soit $T_n = J \circ J \circ ... \circ J(|h|^2)$. Montrer que (T_n) est bornée, et que pour tout réel x, la suite $(T_n(x))$ est croissante.

***f*)** Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout x.

***g*)** Conclure.

Exercice : Une suite et des séries associées

1) Étudier la monotonie stricte si possible et la limite (si elle existe) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

2) On suppose que (u_n) converge mais n'est pas stationnaire. On pose $v_n = -u_n$ et $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}}$

***a*)** Etudier la convergence de (a_n). En déduire un équivalent de v_n et la nature des séries $\sum v_n$, $\sum \sin(v_n^2)$ et $\sum (-1)^n v_n$.

***b*)** Donner un équivalent de $b_n = a_n - 1$. En déduire la nature de la série $\sum (v_n - \dfrac{1}{n})$.

3) On suppose que (u_n) tend vers ∞.

***a*)** Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. on note λ sa limite. on ne demande pas la valeur de λ.

Dans la suite de l'exercice on suppose $u_0 > 0$.

***b*)** Montrer

i. λ est une fonction croissante de u_0.

ii. $\lambda > 0$

iii. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \lambda - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} < \dfrac{1}{2^n.u_n}$.

Peut-on en déduire un équivalent de u_n ?

***c*)** En déduire la nature des séries $\sum \dfrac{1}{u_n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n.n}{u_n}$