DM n°14 (sujet plus dur)

à rendre mercredi 8 avril 2015

Fonction d'une variable complexe définie par une intégrale

Avertissement
Les trois parties sont indépendantes. Le résultat final de la Partie I fournit une valeur particulière de la fonction F étudiée dans les parties II et III.

Partie I - Sommes d'une série

I.A - On considère les sommes : $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Jusitifer qu'elles convergent.

On donne leurs sommes, qu'on pourra utiliser sans démonstration : $A = \frac{\pi^2}{6}$ et $B = \frac{\pi}{4}$

Calculer $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

I.B -

I.B.1) Préciser le domaine d'existence dans $\mathbb{R}$ de $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$.

Exprimer $L(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

I.B.2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

I.B.3) En déduire la valeur de $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$.

I.B.4) Exprimer $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$ en fonction de S_1 et S_2. En déduire la valeur de S_3.

⋆ ⋆ ⋆

Dans toute la suite, on utilise les notations qui suivent :

- Pour tout réel $t > 0$, $\ln t$ désigne le logarithme népérien de t.
- Si t est un réel strictement positif et si $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est un complexe, on note $t^z = \exp(z \ln t)$.
- On définit la fonction $p :]0, 1[\to \mathbb{R}$ par

$$p(t) = \frac{\ln t . \ln(1-t)}{t}.$$

Pour tout z complexe tel que la fonction $t \mapsto t^{-z} p(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$, on pose

$$F(z) = \int_0^1 t^{-z} p(t)\ \mathrm{d}t.$$

On définit ainsi une fonction F de la variable complexe z ; on notera encore, par extension, F la fonction de deux variables réelles associée.

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = F(x + iy)$.

Le but du problème est d'étudier la fonction F.

Partie II - Étude locale de F

II.A - Montrer que le domaine de définition de F est $\Omega = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \Re z < 1\}$.
On pose $I = \Omega \cap \mathbb{R} =]-\infty, 1[$.

II.B - Déterminer la limite de $F(z)$ quand la partie réelle de z tend vers $-\infty$.

II.C -

II.C.1) Déterminer la limite de $F(x)$ quand le réel $x \in I$ tend vers 1.

II.C.2) Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x} \left|\ln t\right| \, \mathrm{d}t$. Calculer $G(x)$.

II.C.3) Prouver que la limite de $F(x) - G(x)$, quand $x \in I$ tend vers 1, existe et est finie.

II.C.4) En déduire la limite de $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ quand $x \in I$ tend vers 1.

II.D - Montrer que la restriction de F à I est C^∞. Pour tout $x \in I$, donner l'expression de la dérivée k-ième $F^{(k)}(x)$ sous forme intégrale.

II.E -

II.E.1) Établir que F est de classe C^∞ sur Ω. Si k et ℓ sont deux entiers $\geqslant 0$ et si $z \in \Omega$, exprimer la dérivée partielle $\dfrac{\partial^{k+\ell} F}{\partial x^k \partial y^\ell}(z)$ sous la forme d'une intégrale.

II.E.2) Comparer $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

II.E.3) Évaluer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

II.F -

II.F.1) Soient $z \in \Omega$ et (z_n) une suite de points de Ω, distincts de z, qui converge vers z. Prouver l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z}$.

On pourra utiliser la continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, ainsi que le résultat de II.E.2.

On observera que cette limite ne dépend que de z, et non de la suite (z_n).

Par la suite, on note $DF(z)$ cette limite.

On définit ainsi une application $DF : \Omega \to \mathbb{C}$.

II.F.2) Pour tout entier $k \geqslant 2$, démontrer l'existence de l'application $D^k F = D(D^{k-1}F) : \Omega \to \mathbb{C}$. On convient que $D^1 F = DF$.

II.G -

II.G.1) Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière de u la fonction $u \in \mathbb{C} \mapsto t^{-u}$. Préciser le rayon de convergence.

II.G.2) Établir qu'au voisinage de 0, $F(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ où $c_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^k \, p(t) \, \mathrm{d}t. \qquad (1)$

II.G.3) Quel est le rayon de convergence R de la série entière (1) ?

II.H -

II.H.1) Déterminer un équivalent de c_k quand $k \to \infty$.

II.H.2) Quelle est la nature de la série (1) quand $|z| = R$?

Partie III - Développements en série

III.A -

III.A.1) Développer en série entière de $t \in \mathbb{R}$ la fonction

$$t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}.$$ Préciser le rayon de convergence.

III.A.2) Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $z \in \Omega$, calculer

$$u_n(z) = \int_0^1 t^{n-z} \ln t \ \mathrm{d}t.$$

III.A.3) Démontrer que $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-z)^2}$.

III.B -

III.B.1) Pour tout $x \in I$, exprimer

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u) \ \mathrm{d}u$$

sous forme d'une série ne faisant plus intervenir d'intégrale. Préciser $\phi(0)$.

III.B.2) Déterminer un équivalent de $\phi(x)$ quand $x \in I$ tend vers 1.

III.C -

III.C.1) Si $y \in \mathbb{R}$, on pose $H(y) = F(iy)$. Les fonctions $|H|$ et $|H|^2$ sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$? Préciser la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y) \ \mathrm{d}y.$$

III.C.2) Pour quelles valeurs des réels α et β, la somme

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{m,n \geqslant 1} (mn)^{-\alpha}(m+n)^{-\beta}$$ est-elle finie ?

III.C.3) Si

$$K_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} (y+im)^{-2}(y-in)^{-2} \ \mathrm{d}y,$$

où m et n sont des entiers $\geqslant 1$, calculer $K_{m,n}$. En déduire la valeur de

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(y)|^2 \ \mathrm{d}y$$ sous la forme $S(\alpha, \beta)$.

III.D -

III.D.1) Démontrer que la série de fonctions obtenue en III.A.3 converge sur un domaine $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. On note encore F le prolongement de F à $\tilde{\Omega}$. Prouver que F est de classe C^∞ sur $\tilde{\Omega}$.

III.D.2) Soient p un réel, n_0 un entier > 0, z et z' deux complexes dont les parties réelles sont majorées par n_0. Pour tout entier $n > n_0$, majorer $|(z'-n)^{-p} - (z-n)^{-p}|$ en fonction de n, n_0, p et $|z'-z|$.

III.D.3) Avec les notations de II.F.1 et II.F.2, pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout $z \in \tilde{\Omega}$, établir l'existence de $D^k F(z)$ qu'on exprimera sous forme de somme d'une série.

III.E -

III.E.1) Pour tout entier $k \geqslant 0$, évaluer c_k, défini en II.G.2, sous forme de somme d'une série numérique.

III.E.2) Retrouver, à l'aide du III.E.1, le résultat obtenu en II.H.1.