

DM n°5 (plus dur)

À rendre mercredi 12 novembre 2014

Notations et définitions :

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} l'ensemble des réels.

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} , \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes, et pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n le sous-espace vectoriel de \mathcal{P} formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n . On pourra utiliser l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme".

On note N la norme ainsi définie sur E : $\forall f \in E, N(f) = \text{Sup}\{|f(t)|/t \in [-1, 1]\}$ (1)

Il n'est pas demandé de montrer que N est une norme.

Étant donné deux éléments f et g de E , et un réel ε strictement positif, on dit que g est une approximation de f à ε près si et seulement si : $N(f - g) \leq \varepsilon$ (2)

Étant donné une fonction f de E , et un entier naturel n , on dit que g est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f si et seulement si g est une fonction de \mathcal{P}_n telle que : $\forall h \in \mathcal{P}_n, N(f - g) \leq N(f - h)$ (3)

Partie I.

1. Soit f une fonction de E , m son minimum, et M son maximum sur le segment $[-1, 1]$. Soit φ une fonction constante et égale au réel k sur $[-1, 1]$.

(a) Calculer $N(f - \varphi)$ en fonction de m , M et k .

(b) Déduisez-en l'existence et l'unicité d'un polynôme g_0 de meilleure approximation d'ordre 0 de f , et donnez l'expression de g_0 en fonction de m et M .

2. Soit n un entier naturel quelconque, et μ le réel défini par : $\mu = \text{Inf}\{N(f - Q)/Q \in \mathcal{P}_n\}$ (4)

Justifiez l'existence de μ , et montrez qu'il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, convergeant vers un élément P de \mathcal{P}_n telle que : $N(f - P_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu$ (5) (on pourra commencer par trouver une suite (Q_k) de \mathcal{P}_n telle que la suite $(N(f - Q_k))$ converge vers μ , puis utiliser Bolzano Weierstrass, en justifiant son emploi).

Déduisez-en l'existence d'un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f , soit g_n (on ne demande pas de démontrer l'unicité de g_n).

3. Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} , de classe C^∞ , telle qu'il existe un réel H positif ou nul tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1, 1], |f^{(n)}(t)| \leq H$ (6)

Soit, pour tout entier naturel n , $S_{n,f}$ le polynôme défini par : $\forall t \in [-1, 1], S_{n,f}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ (7)

(a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f de classe C^∞ sur $[a, b]$.

En déduire : $\forall x \in [a, b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right| \leq \frac{|x - a|^{p+1}}{(p+1)!} \cdot \text{Sup}_{[a,b]} |f^{(p+1)}|$.

(b) Montrez que la suite $(N(f - S_{n,f}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 quand l'entier n tend $+\infty$. Déduisez-en que pour tout réel ε strictement positif, f admet une approximation à ε près, soit g_ε , qui est une fonction polynôme

4. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $\forall t \in [-1, 1], f(t) = \sin(t)$ (8)

et, pour tout réel α , h_α la fonction définie par : $\forall t \in [-1, 1], h_\alpha(t) = \sin(t) - \alpha t$ (9)

Soit ϕ la fonction définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi(\alpha) = N(h_\alpha)$ (10)

(a) Montrez que la fonction ϕ est lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Note : il n'est pas indispensable de calculer une expression de ϕ à l'aide des fonctions usuelles.

(b) Montrez que $\phi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} +\infty$ et que $\phi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$.

(c) Calculez les valeurs de $\phi(1)$ et $\phi(\sin(1))$, et montrez que $\phi(\sin(1)) < \phi(1)$.

(d) Montrez que ϕ admet un minimum sur \mathbb{R} , atteint pour un réel α_0 appartenant à l'intervalle $[\sin(1), 1]$.

5. (a) Montrez que, f étant une fonction vérifiant les hypothèses du 3), et pour une certaine valeur de l'entier naturel n , il est possible que le polynôme $S_{n,f}$ défini au 3) ne soit pas le polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n .
- (b) Montrez qu'il n'y a pas de polynôme Q dans \mathcal{P} qui approche la fonction f définie en (8) mieux que tout autre sur $[-1, 1]$, c'est à dire tel que : $\forall R \in \mathcal{P}, N(f - Q) \leq N(f - R)$ (11)

Partie II

1. (a) Montrez que pour tout entier naturel n , il existe un et un seul polynôme P_n tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(nu) = P_n(\cos(u)) \quad (12)$$

- (b) Montrez que P_n est de degré n , et calculez son coefficient dominant a_n .
- (c) Montrez que le polynôme P_n est pair si l'entier n est pair, et impair si l'entier n est impair.
- (d) Explicitez les polynômes $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.
2. (a) Montrez que pour tout entier naturel non nul n , l'équation : $|P_n(t)| = 1$ (13)
a exactement $n + 1$ solutions sur le segment $[-1, 1]$. On les note x_0, \dots, x_n , de sorte que :
 $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ (14)
Donnez une expression de x_k en fonction des entiers k et n .
- (b) Montrez que $\forall t \in [-1, 1], |P_n(t)| \leq 1$ (15)
- (c) On note F_n la partie de \mathcal{P}_n formée des fonctions polynômes unitaires de degré n . Ainsi, toute fonction P de F_n a une expression de la forme : $\forall t \in [-1, 1], P(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0$ (16)
Soit T_n le polynôme unitaire associé à P_n , c'est à dire : $\forall t \in [-1, 1], T_n(t) = \frac{P_n(t)}{a_n}$ (17)
 a_n étant le coefficient dominant de P_n .
Montrez que pour toute fonction P de F_n , on a : $N(T_n) \leq N(P)$ (18)
et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $P = T_n$
Indication : On pourra étudier les signes de $(T_n - P)(x_k)$.

3. Soit R un polynôme de \mathcal{P}_n

(a) Montrez qu'il existe $n+1$ réels uniques c_0, c_1, \dots, c_n tels que : $\forall t \in [-1, 1] R(t) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(t)$ (19)

- (b) Montrez que le polynôme de meilleure approximation de R d'ordre $n - 1$ est le polynôme R_{n-1} défini par :

$$\forall t \in [-1, 1], R_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(t) \quad (20)$$

On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2).

(c) Application : soit R le polynôme défini par : $\forall t \in [-1, 1], R(t) = \frac{(t+1)^3}{4}$ (21)
Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 2 de R soit R_2 .

4. On suppose comme en I.4) que f est définie par : $\forall t \in [-1, 1], f(t) = \sin(t)$ (8)

- (a) Déterminez le polynôme $S_{5,f}$ selon la définition de I.3), et déterminez les réels c_0, c_1, \dots, c_5 , tels que :

$$\forall t \in [-1, 1], S_{5,f}(t) = \sum_{k=0}^5 c_k P_k(t) \quad (22)$$

- (b) Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 4 de $S_{5,f}$ soit V_4 . On exprimera $V_4(t)$ sous forme de combinaison linéaire des t^k

- (c) Montrez que V_4 est une approximation de f strictement meilleure que $S_{4,f}$, soit
 $N(f - V_4) < N(f - S_{4,f})$ (23)

On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2).

- (d) Quel lien existe-t-il entre les questions II.4.c) et I.5.a) ?