DM n°4

A rendre mercredi 15 octobre 2014

RACINE CARRÉE D'UN ENDOMORPHISME

Notations : dans tout ce problème, n et N sont deux entiers naturels non nuls. E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. $\mathcal{O}$ désigne l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité de E. $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on désigne par

- $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f
- $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble défini par $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g^2 = f\}$
- $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$, où $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par $f^0 = e$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

On rappelle que l'application $\Phi : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ tq $P \mapsto \Phi(P) = P(f)$ est un morphisme d'algèbres. Notamment, $\forall (P,Q) \in (\mathbb{C}[X])^2,\ (P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Premiere Partie

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que $a \neq b,\ e = p+q,\ f = ap + bq,\ f^2 = a^2p + b^2q$.

1. Calculer $(f - ae) \circ (f - be)$.
   En déduire que f est diagonalisable.
2. (a) Établir $p \circ q = q \circ p = \mathcal{O},\ p^2 = p,\ q^2 = q$.
   (b) Prouver que $\ker(f - ae) = \ker q$ et que $\ker(f - be) = \ker p$.
   Prouver que p (resp. q) est la projection sur $\ker(f - ae)$ (resp. $\ker(f - be)$) parallèlement à $\ker(f - be)$ (resp. $\ker(f - ae)$).
   (c) Démontrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.
   (d) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que $ab \neq 0$.
   Montrer que f est bijective et que $\forall m \in \mathbb{Z},\ f^m = a^m p + b^m q$.
3. On pose $F = \{\lambda p + \mu q,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
   (a) Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et calculer $\dim F$.
   (b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.
   (c) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ et donner le cardinal de cet ensemble.
4. *Exemple.* On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire, pour $m \in \mathbb{N}^*$, A^m en fonction de I et de J.
   (b) Démontrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $(R,S) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))^2$ tels que
   $$\forall m \in \mathbb{N},\ A^m = a^m R + b^m S.$$
   (c) En déduire quatre matrices M que l'on écrira en fonction de I et de J telles que $M^2 = A$.
5. Dans cette question, et dans cette question seulement, on prend $N = 2$, et l'on conserve les définitions et notations précédentes.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{R}(f) \Longrightarrow g \circ f = f \circ g$.
   (b) Démontrer que $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ (g \in F \iff g \circ f = f \circ g)$.
   (c) En déduire l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

(d) *Application*: soit $A' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.
Diagonaliser A' et fournir la matrice de passage P.
Déterminer deux matrices R' et S' de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et deux complexes c et d tels que $A' = cR' + dS'$, où R' et S' sont deux matrices de projections telles que $R' + S' = I_2$.
Déterminer enfin toutes les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A'$.

Deuxième Partie

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathcal{O}$ et $u^{n-1} \neq \mathcal{O}$ (c'est-à-dire que u est nilpotent d'indice de nilpotence n).

1. (a) Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.
   (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   Établir $P(u) = \mathcal{O} \iff X^n$ divise P
   (c) Démontrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Longrightarrow n \leq \dfrac{N+1}{2}$.
2. On suppose $n \geq 2$ et $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$.
   Démontrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments (on pourra discuter selon la valeur de l'indice de nilpotence d'un élément g fixé de $\mathcal{R}(u)$).
3. (a) Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$
   (les 3/2 donneront seulement les coefficients a_k du développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0 à un ordre p).
   (b) On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.
   Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.
   Dans la suite du problème, on prend $\omega \in \mathbb{C}^*$ et l'on pose $Q_{n,\omega} = \omega P_n(\dfrac{X}{\omega^2})$.
4. (a) Démontrer (par l'absurde) que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est exactement $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.
   (b) Établir $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) \neq \emptyset$.
5. On suppose $n = N$ et l'on choisit $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre. On considère $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e)$.
   (a) Démontrer que $g \circ u = u \circ g$.
   (b) Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = [P(u)](x)$.
   En déduire que $g = P(u)$.
   (c) Démontrer que $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) = \{Q_{n,\omega}(u), -Q_{n,\omega}(u)\}$.
6. *Application*. Soit $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A''$.
7. Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec H.
   (b) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = H$.
   (c) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = K$.