DS n°5 :mercredi 17 décembre 2014 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème 1 : Série de fonctions

Dans tout le problème, α est un réel fixé.

1. Déterminer selon les valeurs de α la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \mapsto f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{1+x^2} n^{\alpha-2} \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{x} n^{\alpha-2}$.

   (b) Etudier les variations de f_n

   Lorsque la série de terme général $f_n(x)$ converge, on pose $\Phi_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (c) Préciser, selon la valeur de α, l'ensemble D_α de définition de Φ_α.

   (d) Montrer que Φ_α est une application impaire.

   (e) Montrer que si $\alpha < 1$, alors il existe une constante A (qui dépend de α) telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{Ax}{1+x^2} \leq \Phi_\alpha(x) \leq \dfrac{A}{x}$.
   En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \Phi_\alpha(x)$.

   Désormais, dans toute la suite du problème, on suppose $\alpha < 1$.

3. On suppose dans cette question $\alpha < 0$.

   (a) Prouver la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$.
   Qu'en déduit-on quant à la continuité de Φ_α?

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \Phi_\alpha(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} n^{\alpha-2} \ln(1+n^2)$.

4. On suppose dans cette question $0 \leq \alpha < 1$.

   (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur $[\lambda, +\infty[$.
   Etudier la continuité de Φ_α sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_\alpha(\dfrac{1}{N}) > N. \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n^\alpha}{N^2+n^2}$.

   (c) Etudier le membre de droite de l'inégalité précédente et en déduire la discontinuité de Φ_α en 0.

   (d) La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

5. De l'étude de la fonction $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ t \mapsto h(t) = \dfrac{1-t}{(1+t)^2}$, déduire les variations de f_n' sur $[0, +\infty[$.
   Montrer que Φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel réel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

6. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in \mathcal{B}$.
   Calculer $\|f_n\|_\infty$.
   (b) Déterminer l'ensemble Δ des valeurs de α pour lesquelles la série de terme général f_n est absolument convergente dans l'espace $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer l'ensemble Δ' des valeurs de α pour lesquelles la série de terme général f_n est convergente dans l'espace $\mathcal{B}$.

7. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, on considère la somme de la série $\Phi_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, ce qui définit une fonction Φ de Δ dans $\mathcal{B}$ par $\forall \alpha \in \Delta,\ \Phi(\alpha) = \Phi_\alpha$.
   Montrer que l'application Φ est continue sur Δ (on prouvera que $\forall \lambda > 0$, Φ est lipschitzienne sur $I_\lambda =]-\infty, -\lambda]$).

Problème 2 : Une norme

On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées de nombres réels. On munit $\mathcal{B}$ de la norme sup définie par $||x|| = \underset{n\in\mathbb{N}}{Sup}\ |x_n|$ (Attention, il ne s'agit pas du même espace $\mathcal{B}$ que dans le problème 1)

1. Soit $x \in \mathcal{B}$. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$ la série de terme général $u_{n,x}(t) = x_n t^n (1-t)$ converge. On note $g_x(t)$ sa somme :
$$g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n t^n (1-t)$$

2. (a) Montrer que, pour $x \in \mathcal{B}$, la fonction g_x est bornée sur $[0,1]$
   (b) Pour $x \in \mathcal{B}$, montrer que pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} x_n t^n$ est négligeable devant t^p quand t tend vers 0.
   En déduire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre p, de $\dfrac{g_x(t)}{1-t}$.

3. (a) Pour $x \in \mathcal{B}$, on note $\nu(x) = \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |g_x(t)|$. Montrer que ν est une norme sur $\mathcal{B}$.
   (b) Calculer $\nu(x)$ lorsque :
      i. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$
      ii. x est définie par : pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, $x_p = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, tel que $n \neq p$, alors $x_n = 0$.

4. Les normes ν et $||\ .\ ||$ sont-elles équivalentes ?

5. Soit $x \in \mathcal{B}$, on lui associe la suite $y = f(x)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.
   (a) Vérifer que $y \in \mathcal{B}$.
   (b) Montrer que f est injective et linéaire.
   (c) Etudier la continuité de f pour la norme $||\ .\ ||$.
   (d) On admet que pour $x \in \mathcal{B}, \forall t \in [0,1],\ g_y(t) = g_x\left(\dfrac{t}{2-t}\right)$.
   Comparer $\nu(y)$ et $\nu(x)$.
   (e) Justifier que f est une bijection de $\mathcal{B}$ sur $f(\mathcal{B})$ et que sa réciproque est continue pour la norme ν.
   (f) Si x est la suite définie au 3.b.ii., calculer $y = f(x)$ et montrer que $||y|| = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$. Étudier le comportement de $||y||$ quand p tend vers $+\infty$ et en déduire que f^{-1} n'est pas continue de$f(\mathcal{B})$ sur $\mathcal{B}$ pour $||\ .\ ||$.
   (g) Si x est la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r \in \mathbb{R}$, calculer $y = f(x)$. En déduire que $f(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{B}$