PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.

On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
 - a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 - c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 - d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $] -1, 1[$ (justifier).
2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite

finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple* Dédurre de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$
(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II. THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème

d'Abel). On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

- a. Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$,
$$R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}.$$

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que : pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1[$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple* Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$ pour $n \geq 1$).

b. Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on

suppose que les trois séries $\sum u_n, \sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fautive.

On cherche à rajouter une condition (Q) à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et (Q) , alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

9. On prend pour (Q) la propriété : pour tout entier n , $a_n \geq 0$. Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés

$(\mathcal{P}_2)$ et (Q) , alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$ (on pourra montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$).

Si on prend pour (Q) la propriété : la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$), on obtient le **théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV. SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :

si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série

alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. Exemple

Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est périodique de période 6 avec

$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1, \varepsilon_5 = -1, \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

(il est demandé de détailler les calculs).

Exercice I

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note $\text{Ker}(u)$ le noyau de u , et $\text{Im}(u)$ l'image de u .

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\text{Im}(u)$ est contenu dans $\text{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
 - (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$.
 - (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
 - i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
 - ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
 - (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2 . Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \text{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m , $F_i = \text{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

- (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m - 1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1} .
 - (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m , F_i est de dimension au plus $\frac{n}{2^i}$.
 - (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Pour toute matrice A , on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de A , et $\text{Im}(A)$ l'image de A .

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ${}^t A$ la matrice transposée de A .

- (a) Démontrer que $E = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}({}^t A)$.
- (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\text{Im}(A + {}^t A) = \text{Im}(A) + \text{Im}({}^t A)$.