DS n°3

mercredi 5 novembre 2014 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème 1 : à propos du théorème de Césaro

I. Le théorème de Césaro

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels convergeant vers 0. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ (1).

   (a)En scindant la somme, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N et un réel A_N dépendant de N tels que $\forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \dfrac{A_N}{n} + \dfrac{n-N+1}{n}\varepsilon$
   (b)Démontrer que la suite (v_n) converge vers 0.

2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels convergeant vers ℓ, alors la suite (v_n) définie au-dessus converge également vers ℓ.

II. Etude d'une suite récurrente

On considère un réel a et la suite $-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Étudier rapidement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to x(1-x)$, et tracer sa courbe représentative (C) ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$; on précisera la position de (C) par rapport à (Δ).
2. Montrer que $[0,1]$ est stable par f.
3. On suppose que $a \in [0,1]$.
   (a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
   (b) On suppose que $a \in]0,1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{1}{4}]$.
   Soit $y_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.
   Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.
4. On suppose ici $a < 0$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
5. On suppose ici $a > 1$. Quel est le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

III. Réciproque éventuelle du théorème de Césaro

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1)

1. Que penser de la réciproque du théorème de Césaro ?
2. On suppose ici que (u_n) est une suite décroissante de réels positifs. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. On suppose ici que (u_n) vérifie $u_{n+1} - u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On pose $u_0 = 0$.
   En écrivant $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(u_{i+1} - u_i)$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} i(u_{i+1} - u_i)$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 0$.

Problème 2 : Sur les séries numériques

I. Préliminaire

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\sqrt{n})^{-n}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

II. Autour de la série harmonique

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. (a) Minorer $S_{2n} - S_n$ par une constante strictement positive
   (b) Montrer que la série $\sum_{k>0} \frac{1}{k}$ diverge
2. Après avoir donné un équivalent simple de $\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$ pour $n \geqslant 2$, redémontrer le résultat du 1.b, et donner un équivalent simple de S_n.
3. On note $u_n = S_n - \ln(n)$
   (a) Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge. On notera γ sa limite. γ est appelé constante d'Euler.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (a_n) où $a_n = u_n - \frac{1}{2n}$
   (d) En déduire l'encadrement $\frac{1}{2} < \gamma < 1$
   (e) On pose $u_n = \gamma + r_n$. Justifier l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < r_n < \frac{1}{2n}$.
   Donner un majorant du nombre de termes $\frac{1}{k}$ nécessaires pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-10} en utilisant la suite (u_n).
4. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ordonnés : $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ où $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11....$
   On note alors , pour $p \in \mathcal{P}$, $a_p = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.
   (a) Ecrire $\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique.
   En déduire que $\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}.\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}...\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ s'écrit comme une somme de termes $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}}$ où les α_i sont des entiers positifs.
   (b) Montrer que $\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}.\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}...\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} \geqslant S_n$ et conclure sur la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_n}$.

III. Complément au critère de D'Alembert.

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ où $\beta > 1$.

1. Montrer que la suite $(\ln(u_n.n^\alpha))$ est convergente au moyen de la série associée.
2. Donner alors un critère de convergence de la série $\sum u_n$.
3. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{n!}{x^n}\ln(1+x)\ln(1+\frac{x}{2})...\ln(1+\frac{x}{n})$ avec $x > 0$.