DM n°

à rendre mercredi 10 décembre 2014

TRANSCENDANCE

Les deux parties qui suivent traitent de la transcendance de différents nombres réels, mais sont totalement indépendantes. $*$ Un nombre réel x_0 est dit transcendant lorsqu'il n'existe aucun polynôme P de $\mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$ tel que $P(x_0) = 0$. x_0 est dit algébrique dans le cas contraire.

$*$ Prouver que x_0 est algébrique si et seulement si $\exists P \in \mathbb{Z}[X]\backslash\{0\}\ /\ P(x_0) = 0$.

Partie I : transcendance du nombre e (**Hermite**, 1873)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $I(P) = \displaystyle\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$.
   Prouver que $I(P) = [-e^{-\alpha x} Q(\alpha x)]_0^1$, où $Q = P + P' + P'' + ... + P^{(k)}$, avec $k = \deg(P)$;
   prouver ensuite que $e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$, où $R(\alpha) = \alpha e^\alpha \displaystyle\int_0^1 e^{-\alpha x} P(\alpha x)\, dx$.
2. On suppose e algébrique.
   (a) Prouver qu'il existe une famille $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$ telle que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j e^j = 0$ et $n \geq 1$.
   En déduire : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ a_0 Q(0) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j) = -\sum_{j=1}^{n} a_j R(j) \quad (*)$, où Q et R sont définis à partir de P comme au 1.
   (b) On choisit le polynôme P défini précisément par $P(x) = \dfrac{x^{p-1}}{(p-1)!} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - i)^p$, où p est un nombre premier fixé.
   Montrer successivement que
      i. $\forall r \in \mathbb{N},\ r \geq p \Longrightarrow P^{(r)}$ a tous ses coefficients entiers et divisibles par p (on utilisera une expression développée de P, à savoir $P = \sum c_k x^k$).
      ii. $\forall j \in [\![1, n]\!],\ Q(j)$ est un multiple de p.
      iii. Le membre de gauche de $(*)$ est égal à $\xi_p = a_0(-1)^{np}(n!)^p + \lambda p$, avec $\lambda \in \mathbb{Z}$.
   (c) Montrer l'existence d'un entier premier p_0 tel que $\forall p$ premier, $p \geqslant p_0 \Longrightarrow \xi_p \in \mathbb{Z}^*$.
   On opère donc un tel choix dorénavant.
   (d) Démontrer que $\forall j \in [\![1, n]\!],\ |R(j)| \leqslant ne^n \dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!}(n^p)^n$, puis que $|R(j)| \leqslant e^n.n^{n+1}.\dfrac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}$.
   (e) Prouver que l'on peut choisir p de sorte que $(\displaystyle\max_{1 \leq j \leq n} |a_j|).ne^n.n^{n+1}.\dfrac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} < 1$
   (f) Montrer, à l'aide d'une série bien choisie, que lorsque p premier tend vers $+\infty$ alors $R(j)$ tend vers 0 (n'oubliez pas que R dépend de p qui dépend de p). Conclure (ne pas omettre ici que n est fixé).

Partie II : les nombres de **Liouville** : Facultatif

1. Soit $\xi \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que $\{H \in \mathbb{Q}[X],\ H(\xi) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$
   Montrer que si cet idéal est non réduit au polynôme nul il existe un unique polynôme unitaire $M \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\{H \in \mathbb{Q}[X],\ H(\xi) = 0\} = M\mathbb{Q}[X]$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. ξ est dit algébrique de degré n si $M \neq 0$ et si $\deg(M) = n$.

   (b) Soit $\xi \in \mathbb{C}$. montrer que ξ est algébrique de degré 1 si et seulement si $\xi \in \mathbb{Q}$.

2. On veut démontrer le théorème de Liouville, dont l'énoncé est le suivant :
   soit ξ un nombre réel algébrique de degré n sur $\mathbb{Q}$; alors
   $\forall \delta > 0,\ \forall A > 0,$ l'inéquation (1) $|\xi - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{A}{q^{n+\delta}}$ n'a qu'un nombre fini de solutions en rationnels $\dfrac{p}{q}$ (*on suppose* $q \in \mathbb{N}^*$ *dans l'écriture* $\dfrac{p}{q}$ *d'un nombre rationnel quelconque*).

   (a) Démontrer le théorème de Liouville lorsque $\xi \in \mathbb{Q}$ (on prouvera que si $\frac{p}{q}$ vérifie (1), alors q ne prend qu'un nombre fini de valeurs possibles, puis que p ne prend qu'un nombre fini de valeurs possibles).

   (b) Pour ξ algébrique de degré $n \geqslant 2$ (donc irrationnel), introduire un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n dont ξ est racine, prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que P n'a aucune racine rationnelle dans $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, et pour $\dfrac{p}{q} \in]\xi - \alpha, \xi + \alpha[$, démontrer par le théorème des accroissements finis que $|\dfrac{p}{q} - \xi| \geqslant \dfrac{1}{Mq^n}$, où $M = \sup\limits_{y \in [\xi-\alpha, \xi+\alpha]} |P'(y)|$. Conclure.

3. Soit ξ un nombre de la forme $\xi = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in [\![1, 9]\!]$. Un tel nombre est appelé *nombre de Liouville.*

   (a) Justifier la convergence de la série définissant le nombre ξ. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note x_r la somme partielle d'ordre r de cette série.

   (b) Montrer que la famille $(x_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ est formée de rationnels tous distincts.

   (c) Soit $r \in \mathbb{N}$. Démontrer que $0 < \xi - x_r < \dfrac{10}{10^{(r+1)!}}$.

   (d) En déduire que le nombre ξ est transcendant.

   (e) Prouver enfin qu'à deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ distinctes de $[\![1, 9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ correspondent deux nombres transcendants distincts ξ et ζ $\left(\xi = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}},\ \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^{n!}}\right)$(on pourra introduire $s = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \neq b_n\}$).
   On a ainsi *exhibé* une infinité non dénombrable de nombres réels transcendants.

Exercice : une série de fonctions

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application u_n de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$.

1. Etude des modes de convergence de la série $\sum u_n$.

   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement que $[0, +\infty[$.

   (b) étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[0, +\infty[$.

   (c) étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

   (d) On suppose dans cette question $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
   Etablir l'inégalité $R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$.
   La série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif fixé ?

2. On note S la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
   Etudier la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$ étudier la continuité de S en 0.