DM n°12

A rendre mercredi 11 février 2015

Transformée de Laplace

Sujet normal

On convient dans ce problème d'identifier les fonctions polynômes aux polynômes qui leur correspondent

Partie I. Préliminaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction f de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1-(1-x)^n}{x}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$
2. Montrer que la fonction f est une fonction polynôme élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donner son expression dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
3. Montrer que la famille $(1,(X-1),(X-1)^2,...,(X-1)^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et donner l'expression de f dans cette base.
4. Calculer de 2 façons différentes l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}\binom{n}{p}}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

Partie II. Transformée de Laplace

Soit E l'ensemble des fonctions f élément de $C(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ telles que :

- pour tout a strictement positif, f est intégrable sur $]0,a]$ et
- à chaque fonction f on peut associer $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in [A,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant \beta x^n$.

1. Montrer que la fonction ln est élément de E.
2. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $x > 0$ et $f \in E$. Montrer que la fonction φ_x définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi_x(t) = f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On appelle alors transformée de Laplace de f la fonction notée $L(f)$ définie sur $]0,+\infty[$ par
   $$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$
4. Montrer que L est une application linéaire sur E.
5. On note E_1 le sous ensemble de E formé par les applications f de classe C^∞ et telles que f' et f'' appartiennent à E.
   (a) Montrer que la fonction g définie par : $\forall t > 0,\ g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ appartient à E_1.
   (b) Montrer que $\forall f \in E_1,\ \forall x > 0,\ L(f')(x) = -f(0) + xL(f)(x)$ et $L(f'')(x) = -f'(0) - xf(0) + x^2L(f)(x)$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que f_k définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = t^k$ est élément de E.
   Déterminer $L(f_k)$.
7. Soit $x > 0$ On note g_x la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g_x(t) = \dfrac{e^{-x/t}}{\sqrt{t}}$.
   (a) Montrer que $g_x \in E$.
   Soit $b > 0$. On note I l'application définie sur $]0,+\infty[$ par $I(x) = L(g_x)(b)$.

(b) Montrer que I est une application continue sur $]0,+\infty[$ prolongeable par continuité en 0. on note encore I cette fonction prolongée. Calculer $I(0)$ (rappel $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

(c) Montrer que I est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$, $I'(x) = -\sqrt{\dfrac{b}{x}}I(x)$.

(d) En déduire $I(x)$ pour $x>0$.

8. Soit ω un réel et h_ω l'application définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ par $h_\omega(t) = e^{i\omega t}$

   (a) Montrer que h_ω est un élément de E.

   (b) Calculer $L(h_\omega)$.
   En déduire les transformées de Laplace des fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $\cos_\omega(t) = \cos(\omega t)$ et $\sin_\omega(t) = \sin(\omega t)$.

III. Transformée de Laplace de la fonction ln

1. Montrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n\ln(x) \text{ pour } x\in]0,n[\text{ et } u_n(x)=0 \text{ si } x\geqslant n$$

   Montrer que $\forall x>0, \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant |u_n(x)|\leqslant e^{-x}\,|\ln(x)|$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)dt$.

   (a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^p\ln(nu)du$ et la calculer.

   (b) Exprimer J_n en fonction de la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\omega_n = \displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n)$

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx$ en fonction de la constante d'Euler (on rappelle que la constante d'Euler notée γ et la limite de la suite (ω_n))

6. Montrer que la transformée de Laplace de ln est définie sur $]0,+\infty[$ et calculer sa transformée de Laplace.