DM n°2

A rendre mercredi 24 septembre 2014

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E, de cardinal m, tel que F soit stable par tout élément g de G.

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv.

À tout endomorphisme u de E, on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1}ug.$$

1. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G.
2. Calculer $(u^+)^+$.
3. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u.
4. Soit p un projecteur de E d'image F. Montrer que F est inclus dans l'image de p^+.
5. Montrer que, pour tous g et h de G, on a $g^{-1}pgh^{-1}ph = h^{-1}ph$.
6. Montrer que p^+ est un projecteur.
7. Comparer les images de p et de p^+.
8. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G.
9. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G.

Exercice 2

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^∞. on choisit $n+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n$ et $n+1$ entiers naturels $k_0, k_1, ..., k_n$. On suppose connues les valeurs $f(\alpha_i)$, $f'(\alpha_i)$, ... , $f^{k_i}(\alpha_i)$ de f et ses dérives successives en α_i pour tout $i \in \{0, 1, .., n\}$. on note $N = n + \sum_{i=0}^{n} k_i$.

On cherche le polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}[X]$ de f tel que

$$\deg(P) \leqslant N \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, 1, ..., n\},\ \forall j \in \{0, 1, ..., k_i\},\ P^{(j)}(\alpha_i) = f^{(j)}(\alpha_i) \qquad (1)$$

Existence et unicité de P

À l'aide de la fonction $\varphi : \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}^{N+1}$ définie par
$\varphi(Q) = (Q(\alpha_0), ..., Q^{(k_0)}(\alpha_0), Q(\alpha_1), ..., Q^{(k_1)}(\alpha_1), ..., Q(\alpha_n), ..., Q^{(k_n)}(\alpha_n))$ montrer l'existence et l'unicité du polynôme P vérifiant (1).

Détermination de P

1. Montrer qu'il existe des polynômes P_0, P_1,...,P_{n+1} et $R_0, R_1, ..., R_n$ de $\mathbb{R}(X]$ tels que :

$$P_0 = P, \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, .., n\},\ P_i = (X - \alpha_i)^{k_i+1} P_{i+1} + R_i \quad \text{avec} \quad deg(R_i) \leqslant k_i$$

2. Montrer que P_{n+1} est le polynôme nul.
3. Comparer $P_i^{(j)}(\alpha_i)$ et $R_i^{(j)}(\alpha_j)$ pour tout $j \in \{0, 1, .., k_i\}$.

4. (a) Montrer que pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$ on peut écrire $R_i = \sum_{k=0}^{k_i} a_{i,k}(X - \alpha_i)^k$ où les $a_{i,k}$ sont des coefficients réels.
   (b) Calculer les coefficients $a_{i,k}$ à l'aide des valeurs de P_i et de ses dérivées en α_i.
5. Exprimer le polynôme P à l'aide des polynômes R_i et des polynômes $(X - \alpha_i)$. Que retrouve-t-on lorsqu'on choisit $n = 0$?

Problème : COEUR ET NILESPACE D'UN ENDOMORPHISME

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $u^0 = Id_E$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u^n = u \circ u \circ ... \circ u$ (n fois).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Im}(u^n)$ et $G_n = \mathrm{Ker}(u^n)$.

1. (a) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. On note $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
   Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   F est appelé le **cœur** *de u et G est appelé le* **nilespace** *de u.*
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n$ et G_n sont stables par u, puis que F et G sont stables par u.
   Prouver que : u est injectif $\iff G = \{0\}$, et que u est surjectif $\iff F = E$.
   (c) i. Montrer que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, G_n = G_{n+p}$. Dans ce cas, on note $s = \min\{n \in \mathbb{N}; G_n = G_{n+1}\}$.
   ii. En supposant l'existence de s, montrer que $\tilde{u} : G \longrightarrow G\ x \mapsto \tilde{u}(x) = u(x)$ est nilpotent (c'est-à-dire $\exists m \in \mathbb{N}^*, \tilde{u}^m = 0$), montrer que $\hat{u} : F \longrightarrow F\ x \mapsto \hat{u}(x) = u(x)$ est injectif, et que $F_s \bigcap G = \{0\}$.
   (d) i. Montrer que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+p}$. Dans ce cas, on note $r = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ F_n = F_{n+1}\}$.
   ii. En supposant l'existence de r, montrer que u induit une surjection de F sur F, et que $E = F + G_r$.
2. On dit que u est de caractère fini lorsqu'il existe m et n entiers tels que $F_m = F_{m+1}$ et $G_n = G_{n+1}$.
   (a) Soit u de caractère fini. Démontrer que $E = F \bigoplus G$, que F et G sont stables par u, que la restriction de u à G est nilpotente et que u induit un automorphisme de F.
   (b) Réciproquement, on suppose que $E = F' \bigoplus G'$, où F' et G' sont stables par u, avec $u\ |_{G'}$ nilpotent et u induisant un automorphisme de F'.
   Montrer alors que u est de caractère fini, que $F' = F$ et que $G' = G$.
   (c) i. Prouver que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$, alors $G_n = G_{n+1}$.
   ii. Prouver de même que s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $G_m = G_{m+1}$ et $F_{m+1} = F_{m+2}$, alors $F_m = F_{m+1}$.
   iii. En déduire que si u est de caractère fini, alors $r = s$.
   iv. Montrer que, si $\dim E < +\infty$, alors u est de caractère fini et donner une démonstration autonome pour "$r = s$" dans ce cas-là.
   (d) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = F_p \bigoplus G_p$.
   Montrer alors que $G_{2p} = G_p$.
   En déduire, lorsque $s \in \mathbb{N}^*$, cette caractérisation de s pour u de caractère fini :
   $s = \inf\{p \in \mathbb{N}^*,\ E = F_p \bigoplus G_p\}$.
3. Donner un exemple d'endomorphisme u de E pour lequel r n'existe pas et un exemple d'endomorphisme v de E pour lequel s n'existe pas.
   Et se peut-il que ni r ni s n'existent pour un endomorphisme w de E ?