PRODUIT DE CONVOLUTION

Partie I

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \text{ est nulle en dehors de } [-1,1]. \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt = 1. \\ \forall \delta > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\sup_{|x|>\delta} \varphi_n(x)) = 0. \end{cases}$$

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt$ et l'on note $f_n = f * \varphi_n$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ est défini et que $f_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(x-t)\,dt$.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

3. Montrer que si les applications φ_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même des applications f_n.

4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}) & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x \notin]-1,1[\end{cases}$

   (a) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   (b) On pose $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n(x) = \dfrac{n}{A} g(nx)$.
   Montrer que la suite (φ_n) vérifie les trois conditions du début de cette partie.

   (c) En déduire que toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite d'une suite de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et nulle hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx$ et l'on définit $\Psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)^n}{A_n} & \text{si } |x| \le 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$.

On pose enfin $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = f * \Psi_n$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

2. Démontrer que si h est une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales définies sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers h (c'est le théorème de **Weierstrass**).

3. Prouver que si u est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers u, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
   Dans quels cas la convergence de cette dernière suite peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?