

À rendre mercredi 12 novembre 2014

Polynômes trigonométriques

On note U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et normalisés, c'est à dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

On appelle polynôme trigonométrique toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$ (les c_k sont donc indépendants de θ).

Lorsque f n'est pas le polynôme trigonométrique nul, on pourra supposer $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$.

On note enfin $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,i} = 1$ et pour $i \neq j$, $\delta_{i,j} = 0$.

Petit préliminaire

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup\{|P(x)|/x \in [-1; 1]\}$. Vérifier qu'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{C}[X]$. Dans toute la suite du problème, $\mathbb{C}[X]$ sera muni de cette norme.

Partie I

Soit f un polynôme trigonométrique : $f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$.

- Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \delta_{m,0}$; en déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta = c_m$
En déduire l'unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique (i.e. l'unicité de l'entier N et de la suite $(c_{-N}, \dots, c_N)$ avec $(c_{-N}, c_N) \neq (0, 0)$).
- Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) \in \mathbb{R} \iff \forall k \in [[0, N]]$, $c_{-k} = \overline{c_k}$.
- Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$.
Exprimer les coefficients de P à l'aide des c_k : on notera $P = \sum_j u_j X^j$. Quel est le degré de P si $c_N \neq 0$?

Dans tout le reste du problème, on supposera f à valeurs dans $\mathbb{R}$, et f non nul.

- Montrer que $P(0) \neq 0$ et vérifier que $\forall k \in [[0, 2N]]$, $u_{2N-k} = \overline{u_k}$.
En exprimant $P(1/\bar{z})$ en fonction de $P(z)$, en déduire que si z_0 est une racine de P de multiplicité m , alors $1/\overline{z_0}$ est aussi racine de P de multiplicité m .
- Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0}$ est une racine de P de multiplicité m .
 - Montrer qu'il existe une application continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g(\theta_0) \neq 0$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \left(\sin \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \right)^m \cdot g(\theta)$.
 - Montrer que si de plus f est à valeurs réelles positives, alors m est pair.

On suppose désormais f à valeurs réelles positives.

- Montrer qu'on peut factoriser P sous la forme $P(X) = cA(X)B(X)$ où
 - c est une constante complexe non nulle,
 - A est soit le polynôme 1, soit un polynôme du type $A = \prod_{k=1}^p (X - e^{i\theta_k})^{2\alpha_k}$, les θ_k étant des réels distincts modulo 2π et les α_k des entiers naturels.
 - B est le polynôme 1 ou un polynôme du type $B = \prod_{k=1}^q \left((X - z_k) \left(X - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) \right)^{\beta_k}$, les z_k étant des complexes de modules strictement inférieurs à 1, les z_k distincts et les β_k des entiers naturels.

Que vaut la somme de tous les α_k et β_k ?

- (b) En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à N tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$.

on pourra remarquer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta} - z_k)(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_k}) = -\frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_k} |e^{i\theta} - z_k|^2$ et $(e^{i\theta} - e^{i\theta_k})^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^2$.

Partie II

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \quad (n \geq 1)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n . Quel est le coefficient de X^n de T_n ?

Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ et calculer $\|\frac{1}{2^{n-1}} T_n\|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. pour k dans $\mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on pose $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$.

On remarquera que $-1 = x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 = 1$

- (a) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ normalisé de degré n . on suppose que $\|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Montrer que le polynôme

$Q = \frac{1}{2^{n-1}} T_n - P$ s'annule sur chaque intervalle $]x_{j+1}, x_j[$, avec $0 \leq j \leq n-1$. En déduire une contradiction.

- (b) Montrer que pour $P \in U_n, \|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

On traitera successivement le cas P réel, puis P complexe en séparant les parties réelles et imaginaires.

- (c) Montrer que $\inf\{\|P\|/P \in U_n\} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Soit $f(\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\theta}$ un polynôme trigonométrique non nul à valeurs réelles positives.

- (a) Montrer qu'il existe un unique $(2N+1)$ -uplet $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

- (b) On sait qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2$.

Soit $Q = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ un tel polynôme. Montrer que $a_N - ib_N = 2\bar{\alpha}_0 \alpha_N$ et $a_0 = \sum_{k=0}^N |\alpha_k|^2$. En déduire que $a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2$.

4. Un cas particulier : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ où $N \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0 = \alpha_N = 1$ et

$$f(\theta) = |Q(e^{i\theta})|^2 = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

On pose $M(Q) = \sup\{|Q(e^{i\theta})|/\theta \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Que deviennent les relations du II.3.b ?

- (b) Montrer en utilisant une intégration que $(M(Q))^2 \geq a_0$.

- (c) En réutilisant II.3.b. pour $g : \theta \rightarrow M(Q)^2 - f(\theta)$, montrer que $M(Q) \geq 2$ avec égalité si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{N-1} = 0$.

5. Soit $A \in U_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|A\| = \frac{1}{2^{n-1}}$. On considère la polynôme $Q = 2^n X^n A \left(\frac{1}{2} \left(X + \frac{1}{X} \right) \right)$.

- (a) Donner le degré de Q , son terme constant et son terme de plus haut degré.

- (b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $2 \cos \theta = z + 1/z$. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}, 2 \cos(m\theta) = z^m + \frac{1}{z^m}$.

- (c) Calculer $M(Q)$. En déduire que $Q(X) = X^{2n} + 1$.

- (d) Montrer que $A = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. Conclusion ?