DM n°10

À rendre mercredi 20 février 2019

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ , $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Déterminer la valeur du réel α .
3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X .
5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.
En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r , montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X, Y) = (i, j)]).$$

- (a) Déterminer le rang de la matrice B .
- (b) Déterminer la valeur de $\text{Tr}(B)$, la trace de la matrice B .

Problème