DM n°2 : Algèbre linéaire

A rendre mercredi 26 septembre 2018

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un résultat d'arithmétique

On considère l'ensemble suivant : $A_{n,\alpha} = \{p \in \mathbb{N}^* / exp(2i\pi np\alpha) = 1\}$.

1. Montrer que $A_{n\alpha}$ n'est pas vide si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Dorénavant on supposera $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

Notons $p(\alpha) = \min(A_{n\alpha})$

2. Étudier la parité de p.

On pose $|\alpha| = \dfrac{r}{s}$ avec $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $r \wedge s = 1$. On note $d = n \wedge s$ et n' et s' les entiers tq $n = dn'$ et $s = ds'$.

3.Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $p \in A_{n,\alpha} \iff \exists t \in \mathbb{N}^*$ tel que $pn'r = s't$.

4. Montrer que $p(\alpha) = \dfrac{s}{n \wedge s}$.

Un ensemble de matrices

On note **J** l'ensemble de toutes les matrices du type $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lorsque λ décrit $\mathbb{C}^*$ et I est la matrice unité

5. **J** est-il un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

6. On note N la matrice J_0. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ il existe trois suites complexes u, v, w dont on exprimera le terme général à l'aide de λ telles que $\forall p \in \mathbb{N},\ (J_\lambda)^p = u_p.I + v_p.N + w_p.N^2$.

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. on pse $\forall p \in \mathbb{N},\ S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(J_\lambda)^k$. Montrer qu'il existe une suite complexe x que l'on explicitera telle que pour tout nombre entier p supérieur ou égal à 2 on ait : $S_p = x_p.I + x_{p-1}.N + \dfrac{1}{2}x_{p-2}N^2$.

8. On admettra le résultat suivant : si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Pour $p \in \mathbb{N}$ on note $a_{i,j}(p)$ le coefficient de S_p situé ligne i colonne j. Déterminer la matrice S dont le coefficient général $a_{i,j}$ est égal à : $a_{i,j} = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} a_{i,j}(p)$.

Etude d'une application linéaire

On note E l'ensemble de toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $[0]$ la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

9. Pour $f \in E$ on appelle g l'application de E définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x + 2\pi)$.
On note alors $\varphi : f \to \varphi(f) = g$. Montrer que $\varphi \in L(E)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note E_k le sous ensemble de E constitué des applications du type : $x \to P(x).e^{i\alpha x}$ avec $P \in C_k[X]$.

10.a. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ où f_k est la fonction $x \to x^k.e^{i\alpha x}$ est une base de E_n.

10.b. Exprimer simplement E_{n+1} à l'aide de E_n et de la droite vectorielle $\{\lambda.f_{n+1} / \lambda \in \mathbb{C}\}$.

11. Montrer que $\varphi(E_n) \subset E_n$.

12. On désigne par m l'automorphisme de E_n défini, pour $f \in E_n$ par $m(f) = \varphi(f)$. on note M la matrice de m relativement à la base $\mathcal{F}$. Montrer que M est une matrice triangulaire supérieure que l'on représentera en ne faisant figurer que les coefficients nuls, les coefficients diagonaux, ainsi que ceux situés juste en dessus de la diagonale.

13. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, donner le plus petit entier naturel non nul p tel que $(m)^p$ soit de déterminant égal à 1.

Changement de base

Soit $\ell = m - (e^{2i\pi\alpha}).id$.

14.a. Vérifier que $\ell(f_0)$ est l'application nulle.

Soit $k \in [[0, n-1]]$. Montrer que $\ell(f_{k+1}) \in E_k$ et déterminer sa composante selon f_k.

14.b. Montrer : $\forall k \in [[0,n]],\ E_k \subset \mathrm{Ker}(\ell^{k+1})$. Montrer : $\forall k \in [[0,n]],\ \ell^k(f_k) = \left(k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}\right).f_0$.

14.d. Montrer que $\mathcal{B} = (\ell^n(f_n), \ell^{n-1}(f_n), ..., l(f_n), f_n)$ est une base de E_n.

15. Déterminer relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice de ℓ. En déduire la matrice de m dans cette base.

16. On note $\mathbf{J}_{n+1}$ l'ensemble de matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre $n+1$, dont les éléments diagonaux sont égaux et de module 1, dont les éléments situés juste au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, et dont tous les autres éléments sont nuls.

Montrer que l'application qui à un nombre réel α associe M' la matrice de $m_\alpha = \ell + e^{21\pi\alpha}$ dans est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{J}_{n+1}$

Problème 2 : COEUR ET NILESPACE D'UN ENDOMORPHISME

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $u^0 = Id_E$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u^n = u \circ u \circ ... \circ u$ (n fois).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Im}(u^n)$ et $G_n = \mathrm{Ker}(u^n)$.

1. (a) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. On note $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
   Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   F est appelé le **cœur** *de u et G est appelé le* **nilespace** *de u.*
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n$ et G_n sont stables par u, puis que F et G sont stables par u.
   Prouver que : u est injectif $\iff G = \{0\}$, et que u est surjectif $\iff F = E$.
   (c) i. Montrer que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, G_n = G_{n+p}$. Dans ce cas, on note $s = \min\{n \in \mathbb{N}; G_n = G_{n+1}\}$.
   ii. En supposant l'existence de s, montrer que $\tilde{u} : G \longrightarrow G\ x \mapsto \tilde{u}(x) = u(x)$ est nilpotent (c'est-à-dire $\exists m \in \mathbb{N}^*, \tilde{u}^m = 0$), montrer que $\hat{u} : F \longrightarrow F\ x \mapsto \hat{u}(x) = u(x)$ est injectif, et que $F_s \bigcap G = \{0\}$.
   (d) i. Montrer que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+p}$. Dans ce cas, on note $r = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ F_n = F_{n+1}\}$.
   ii. En supposant l'existence de r, montrer que u induit une surjection de F sur F, et que $E = F + G_r$.
2. On dit que u est de caractère fini lorsqu'il existe m et n entiers tels que $F_m = F_{m+1}$ et $G_n = G_{n+1}$.
   (a) Soit u de caractère fini. Démontrer que $E = F \bigoplus G$, que F et G sont stables par u, que la restriction de u à G est nilpotente et que u induit un automorphisme de F.
   (b) Réciproquement, on suppose que $E = F' \bigoplus G'$, où F' et G' sont stables par u, avec $u\ |_{G'}$ nilpotent et u induisant un automorphisme de F'.
   Montrer alors que u est de caractère fini, que $F' = F$ et que $G' = G$.
   (c) i. Prouver que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$, alors $G_n = G_{n+1}$.
   ii. Prouver de même que s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $G_m = G_{m+1}$ et $F_{m+1} = F_{m+2}$, alors $F_m = F_{m+1}$.
   iii. En déduire que si u est de caractère fini, alors $r = s$.
   iv. Montrer que, si $\dim E < +\infty$, alors u est de caractère fini et donner une démonstration autonome pour "$r = s$" dans ce cas-là.
   (d) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = F_p \bigoplus G_p$.
   Montrer alors que $G_{2p} = G_p$.
   En déduire, lorsque $s \in \mathbb{N}^*$, cette caractérisation de s pour u de caractère fini :
   $s = \inf\{p \in \mathbb{N}^*,\ E = F_p \bigoplus G_p\}$.
3. Donner un exemple d'endomorphisme u de E pour lequel r n'existe pas et un exemple d'endomorphisme v de E pour lequel s n'existe pas.
   Et se peut-il que ni r ni s n'existent pour un endomorphisme w de E ?