

# DM n°3

A rendre mercredi 10 septembre 2018

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun** et d'en déduire une **forme normale pour des vecteurs propres**.

Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et  $n$ . Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.

Les parties II, III et IV sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

**Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.**

## Notations et définitions

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Notons  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$0_n$  la matrice nulle d'ordre  $n$

et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\},$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$

$\text{Sp}(M)$  le spectre de  $M$ ,

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(\lambda I_n - M)$$

$$\text{et } \text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(\lambda I_n - M).$$

## Définitions :

- Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et  $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ;

on dit que  $\mathbf{e}$  est un **vecteur propre commun** à  $A$  et  $B$  si :

i)  $\mathbf{e} \neq 0$  ;

ii) il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$  ;

iii) il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$  ;

On définit  $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par la formule :  $[A, B] = AB - BA$ .

- Soient  $f$  et  $g$ , deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ - espace vectoriel  $E$  et  $\mathbf{e} \in E$  ;

on dit de même que  $\mathbf{e}$  est un **vecteur propre commun** à  $f$  et  $g$  si :

i)  $\mathbf{e} \neq 0$  ;

ii) il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$  ;

iii) il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$  ;

On définit l'endomorphisme  $[f, g]$  de  $E$  par la formule :  $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ .

## Partie I : ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  où  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On note aussi  $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

### I.1.

**I.1.a.** Déterminer le spectre de  $A$ .

**I.1.b.** Vérifier que la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

**I.1.c.**  $A$  est-elle diagonalisable ?

**I.1.d.** Montrer qu'aucun des éléments de  $\mathcal{F}$  n'est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

### I.2.

**I.2.a.** Déterminer le spectre de  $B$ .

**I.2.b.** Montrer que  $\text{Im}_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_4)$  et que  $\dim(E_2(B)) = 2$ .

**I.2.c.**  $B$  est-elle diagonalisable ?

### I.3.

**I.3.a.** Montrer que  $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_5)$ .

**I.3.b.** Déterminer tous les vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$ .

### I.4.

**I.4.a.** Vérifier que  $[A, B] = C$ .

**I.4.b.** Montrer que  $C$  est semblable à la matrice  $D$  et déterminer le rang de  $C$ .

## Partie II : CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .

**II.1.** Dans cette question, on suppose que  $\mathbf{e}$  est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

**II.1.a.** Montrer que  $\mathbf{e} \in \text{Ker}([A, B])$ .

**II.1.b.** Vérifier que  $\text{rg}([A, B]) < n$ .

*Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .*

On dit que  $A$  et  $B$  vérifient la **propriété  $\mathcal{H}$**  s'il existe  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B]).$$

**II.2.** Montrer que si  $[A, B] = 0_n$ , alors  $A$  et  $B$  vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**II.3.** Dans cette question, on suppose que  $A$  et  $B$  vérifient la propriété  $\mathcal{H}$ .

**II.3.a.** Pour tout  $X \in E_\lambda(A)$ , on pose  $\psi(X) = BX$ . Montrer que  $\psi$  définit un endomorphisme de  $E_\lambda(A)$ .

**II.3.b.** En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{P}_k$  la **propriété suivante** :

pour tout  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $k$  et pour tout couple d'endomorphismes  $(\varphi, \psi)$  de  $E$  tels que  $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ , il existe un vecteur propre commun à  $\varphi$  et  $\psi$ .

**II.4.** Vérifier la propriété  $\mathcal{P}_1$ .

**II.5.** Dans cette question, on suppose que  $\mathcal{P}_k$  est vérifiée pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et que  $A$  et  $B$  ne vérifient pas la propriété  $\mathcal{H}$ .

On note  $C = [A, B]$ , on suppose que  $\text{rg}(C) = 1$  et on considère  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ .

**II.5.a.** Justifier l'existence de  $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  et  $C\mathbf{u} \neq 0$ .

**II.5.b.** Vérifier que  $\text{Im}(C) = \text{Vect}(\mathbf{v})$  où  $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$ .

**II.5.c.** Montrer que  $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$ .

**II.5.d.** Établir les inégalités suivantes :  $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$ .

Pour tout  $X \in \text{Im}_\lambda(A)$ , on pose  $\varphi(X) = AX$  et  $\psi(X) = BX$ .

**II.5.e.** Montrer que  $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$  et  $[B, A - \lambda I_n] = -C$ .

En déduire que  $\varphi$  et  $\psi$  définissent des endomorphismes de  $\text{Im}_\lambda(A)$ .

**II.5.f.** Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à  $\varphi$  et  $\psi$ ; en déduire qu'il en est de même pour  $A$  et  $B$ .

**II.6.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

### Partie III : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $2n$ .

Pour  $P \in E$ , on désigne par  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ .

Pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , on pose  $f(P) = P'$  et  $g(P) = X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

**III.1.** Soient  $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$  et  $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ . Montrer que  $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$ .

**III.2.** Montrer que  $f$  et  $g$  définissent des endomorphismes de  $E$ .

**III.3.**

**III.3.a.** Vérifier que si  $P$  est un vecteur propre de  $g$ , alors  $\deg(P) \geq n$ .

**III.3.b.** Montrer que  $X^n$  est un vecteur propre de  $g$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ .  $f^i$  correspond à la composée  $f \circ f \circ \dots \circ f$  où  $f$  est prise  $i$  fois.

**III.4.**

**III.4.a.** Vérifier que  $\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ .

**III.4.b.** Montrer que  $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$ .

**III.5.** Montrer que  $f^i$  et  $g$  possèdent un vecteur propre commun si et seulement si  $i \geq n+1$ .

$\mathcal{B}_c$  désigne la base canonique de  $E$  définie par :  $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$ .

On note  $A_n$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_c$  et  $B_n$  celle de  $g$  dans la même base.

**III.6.** Déterminer  $A_n$  et  $B_n$ .

**III.7.** Dans cette question, on suppose que  $n = 1$ .

**III.7.a.** Montrer que  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et en déduire l'expression de  $(A_1)^2$  et  $(A_1)^3$ .

**III.7.b.** Déterminer le rang de  $[(A_1)^i, B_1]$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

**III.7.c.** En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.

## Partie IV : FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On note  $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } x_i = 0 \right\}$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $X$  un vecteur propre de  $A$ .

On dit que  $X$  est **sous forme normale** si :

•  $X \in \mathcal{N}$

ou

• Il existe  $\lambda' \in \text{Sp}(A)$  et il existe  $U \in \mathcal{N}$  tel que  $X = (A - \lambda' I_n)U$ .

**IV.1.** Dans cette question, on suppose que  $A$  possède une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\dim(E_\lambda(A)) \geq 2$ . Montrer que  $A$  admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des **matrices**  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  **antisymétriques**, c'est-à-dire telles que  ${}^t M = -M$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ , on pose :  $\varphi(M) = AM + M {}^t A$  et  $\psi(M) = AM {}^t A$ .

**IV.2.**

**IV.2.a.** Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$ .

**IV.2.b.** Montrer que les colonnes d'une matrice  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  sont des éléments de  $\mathcal{N}$ .

**IV.2.c.** Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  définissent des endomorphismes de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ .

**IV.2.d.** Vérifier que  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ .

**IV.3.** Dans cette question, on suppose que  $A$  possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

On considère  $X_1$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$  et  $X_2$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$ .

On note  $B = X_1 {}^t X_2 - X_2 {}^t X_1$ .

**IV.3.a.** Montrer que  $B$  vérifie chacune des propriétés suivantes :

**i)**  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  ;      **ii)**  $B \neq 0_n$  ;

**iii)**  $AB + B {}^t A = (\lambda_1 + \lambda_2)B$  ;      **iv)**  $AB {}^t A = (\lambda_1 \lambda_2)B$ .

**IV.3.b.** En déduire que  $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$ .

**IV.3.c.** Dans cette question, on suppose que  $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$ . Montrer qu'au moins l'une des colonnes de  $B$  est un vecteur propre de  $A$  sous forme normale.

**IV.3.d.** Dans cette question, on suppose que  $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0_n$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4.** Dans cette question, on suppose que  $A$  ne possède qu'une seule valeur propre  $\lambda$ .

**IV.4.a.** Montrer l'existence d'une matrice  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$  non nulle vérifiant chacune des propriétés suivantes :

**i)** il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que :  $AB + B {}^t A = \alpha B$  ;

**ii)** il existe  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que :  $AB {}^t A = \beta B$ .

**IV.4.b.** Vérifier que  $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$ .

**IV.4.c.** Montrer qu'il existe  $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0_n$ .

**IV.4.d.** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B = 0_n$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4.e.** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$  et  $\delta = \lambda$ . Montrer que  $A$  possède un vecteur propre sous forme normale.

**IV.4.f.** Dans cette question, on suppose que  $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$  et  $\delta \neq \lambda$ . Montrer que  $A - \delta I_n$  est une matrice inversible et en déduire que  $(A - \gamma I_n)B = 0$ .

**IV.4.g.** Que conclure ?

**Fin de l'énoncé**