DM n°4 à rendre mercredi 7 novembre 2018

Suites et séries numériques

Vous traiterez le problème 1 et le problème 2. Ceux qui font un Dm plus dur traiteront le Problème 3 en plus

Problème 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de cette suite selon la position de u_0 par rapport à -1 et à 0.
2. On suppose dans cette question que $u_0 \in]-1, 0[$. On pose $v_n = -u_n$ et $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} \sim v_n$
   (b) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite à déterminer.
   (c) Déterminer un équivalent de v_n
   (d) En déduire la nature des séries $\sum v_n$, $\sum \sin(v_n^2)$ et $\sum (-1)^n v_n$.
3. On suppose dans cette question que (u_n) tend vers $+\infty$.
   (a) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$. En considérant la série $(P_{n+1} - P_n)$, montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. on note λ sa limite (λ dépend donc de u_0). On ne demande pas la valeur de λ Dans la suite, on supposera $u_0 > 0$.
   (b) Montrer que
      - λ est une fonction croissante de u_0.
      - $\lambda > 0$.
      - $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \lambda - \dfrac{\ln(u_n)}{2^n} < \dfrac{1}{2^n.u_n}$.
      - Déterminer un équivalent de u_n
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n n}{u_n}$.

Problème 2

Problème 3 : à propos des normes N_p

Dans ce problème, on va s'intéresser aux applications $N_p : \begin{cases} R^n & \to \mathbb{R} \\ u = (u_1, ..., u_n) & \to \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \end{cases}$ où p est un réel avec $p > 1$.

On montrera que ce sont des normes et on étudiera quelques propriétés de ces normes.

I. Montrons que N_p est une norme

Dans toute cette question p et q sont des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer, en utilisant la concavité de ln que $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.

2. Dans cette question on va établir l'inégalité de Holder : $\sum_{k=1}^{n} |u_k|\,|v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}$ $(hold)$

   (a) Soit $(u_1, ..., u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p = 1$ et $(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q = 1$.
   Etablir $(hold)$ dans ce cas là.

   (b) Dans le cas général, en considérant $u'_k = \dfrac{u_k}{\left(\sum |u_k|^p\right)^{1/p}}$ et $v'_k = \dfrac{v_k}{\left(\sum |v_k|^q\right)^{1/q}}$ conclure sur $(hold)$.

3. (a) Justifier que $|u_k + v_k|^p \leqslant |u_k|.|u_k + v_k|^{p-1} + |v_k||u_k + v_k|^{p-1}$

   (b) pour $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ montrer que
   $N_p(u+v)^p \leqslant \left(\left(\sum |u_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |v_k|^p\right)^{1/p}\right) . \left(\sum [u_k + v_k|^{pq-q}\right)^{1/q}$

   (c) Conclure sur l'inégalité triangulaire sur N_p.

   (d) Montrer que N_p est une norme.

II. Une limite

Dans cette partie on suppose $n = 2$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ fixé (pour simplifier les écritures, on prend ici $n = 2$). Montrer que l'application $p \to N_p(u)$ est une fonction décroissante dans $[1, +\infty[$.

2. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} N_p(u) = ||u||_\infty$