DM n°6

À rendre mercredi 28 novembre 2018

Notations et définitions :

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes, et pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pourra utiliser l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme".

On note N la norme ainsi définie sur E : $\quad \forall f \in E,\ N(f) = Sup\{|f(t)|/t \in [-1,1]\} \qquad (1)$

Il n'est pas demandé de montrer que N est une norme.

Étant donné deux déments f et g de E, et un réel ε strictement positif, on dit que g est une approximation de f à ε près si et seulement si : $\quad N(f-g) \leqslant \varepsilon \qquad (2)$

Étant donné une fonction f de E, et un entier naturel n, on dit que g est un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f si et seulement si g est une fonction de $\mathcal{P}_n$ telle que : $\quad \forall h \in \mathcal{P}_n,\ N(f-g) \leqslant N(f-h) \qquad (3)$

Partie I : facultative, sauf pour les étudiants faisant des DS plus durs

1. Soit f une fonction de E, m son minimum, et M son maximum sur le segment $[-1,1]$. Soit φ une fonction constante et égale au réel k sur $[-1,1]$.
   (a) Montrer que $N(f-\varphi) = \text{Max}(|m-k|, |M-K|)$.
   (b) Déduisez-en l'existence et l'unicité d'un polynôme g_0 de meilleure approximation d'ordre 0 de f, et donnez l'expression de g_0 en fonction de m et M.

2. Soit n un entier naturel quelconque, et μ le réel défini par : $\quad \mu = Inf\{N(f-Q)/Q \in \mathcal{P}_n\} \qquad (4)$
   Justifiez l'existence de μ, et montrez qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, convergeant vers un élément P de $\mathcal{P}_n$ telle que : $\quad N(f-P_k) \underset{k\to+\infty}{\to} \mu \qquad (5)$ (*on pourra commencer par trouver uen suite (Q_k) de $\mathcal{P}_n$telle que la suite $(N(f-Q_k))$ converge vers μ, puis utiliser Bolzano Weierstrass, en justifiant son emploi*).
   Déduisez-en l'existence d'un polynôme de meilleure approximation d'ordre n de f, soit g_n (on ne demande pas de démontrer l'unicité de g_n).

3. Soit f une fonction définie sur $[-1,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, telle qu'il existe un réel H positif ou nul tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-1,1],\ \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant H \qquad (6)$
   Soit, pour tout entier naturel n, $S_{n,f}$ le polynôme défini par : $\quad \forall t \in [-1,1],\ S_{n,f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad (7)$
   (a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f de classe C^∞ sur $[a,b]$.
   En déduire : $\forall x \in [a,b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!} . \underset{[a,b]}{\text{Sup}} \left|f^{(p+1)}\right|$.
   (b) Montrez que la suite $(N(f-S_{n,f}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O quand l'entier n tend $+\infty$. Déduisez-en que pour tout réel ε strictement positif, f admet une approximation à ε près, soit g_ε, qui est une fonction polynôme

4. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $\quad \forall t \in [-1,1],\ f(t) = sin(t) \qquad (8)$
   et, pour tout réel α, h_α la fonction définie par : $\quad \forall t \in [-1,1],\ h_\alpha(t) = sin(t) - \alpha t \qquad (9)$
   Soit ϕ la fonction définie par : $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \phi(\alpha) = N(h_\alpha) \qquad (10)$
   (a) Montrez que la fonction ϕ est lipschitzienne sur R.
   Note : il n'est pas indispensable de calculer une expression de ϕ à l'aide des fonctions usuelles.
   (b) Montrez que $\phi(\alpha) \underset{\alpha\to-\infty}{\to} +\infty$ et que $\phi(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\to} +\infty$.
   (c) Calculez les valeurs de $\phi(1)$ et $\phi(sin(1))$, et montrez que $\phi(\sin(1)) < \phi(1)$.
   (d) Montrez que ϕ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint pour un réel α_0 appartenant à l'intervalle $[sin(1), 1[$.

5. (a) Montrez que, f étant une fonction vérifiant les hypothèses du 3), et pour une certaine valeur de 1' entier naturel n, il est possible que le polynôme $S_{n,f}$ défini au 3) ne soit pas le polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n.

   (b) Montrez qu'il n'y a pas de polynôme Q dans $\mathcal{P}$ qui approche la fonction f définie en (8) mieux que tout autre sur $[-1,1]$, c'est à dire tel que : $\forall R \in \mathcal{P},\ N(f-Q) \leqslant N(f-R)$ (11)

Partie II

1. (a) Montrez que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme P_n tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \cos(nu) = P_n(\cos(u)) \qquad (12)$$

   (b) Montrez que P_n est de degré n, et calculez son coefficient dominant a_n.

   (c) Montrez que le polynôme P_n est pair si l'entier n est pair, et impair si l'entier n est impair.

   (d) Explicitez les polynômes $P_O, P_l, P_2, P_3, P_4, P_5$.

2. (a) Montrez que pour tout entier naturel non nul n, l'équation : $|P_n(t)| = 1$ (13)
   a exactement $n+1$ solutions sur le segment $[-1,1]$. On les note $x_0, ..., x_n$, de sorte que :
   $x_0 > x_1 > ... > x_n$ (14) .
   Donnez une expression de x_k en fonction des entiers k et n.

   (b) Montrez que $\forall t \in [-1,1],\ |P_n(t)| \leqslant 1$ (15)

   (c) On note F_n la partie de $\mathcal{P}_n$ formée des fonctions polynômes unitaires de degré n. Ainsi, toute fonction P de F_n a une expression de la forme : $\forall t \in [-1,1],\ P(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + ... + b_1 t + b_0$ (16)
   Soit T_n le polynôme unitaire associé à P_n , c'est à dire : $\forall t \in [-11],\ T_n(t) = \dfrac{P_n(t)}{a_n}$ (17)
   a_n étant le coefficient dominant de P_n.
   Montrez que pour toute fonction P de F_n , on a : $N(T_n) \leqslant N(P)$ (18)
   et que cette inégalité est une égalité si et seulement si $P = T_n$
   Indication : *On pourra étudier les signes de* $(T_n - P)(x_k)$.

3. Soit R un polynôme de $\mathcal{P}_n$

   (a) Montrez qu'il existe $n+1$ réels uniques $c_0, c_1, ..., c_n$ tels que : $\forall t \in [-1,1] R(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(t)$ (19)

   (b) Montrez que le polynôme de meilleure approximation de R d'ordre $n-1$ est le polynôme R_{n-1} défini par :
   $\forall t \in [-1,1],\ R_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(t)$ (20)
   On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2).

   (c) Application : soit R le polynôme défini par : $\forall t \in [-1,1],\ R(t) = \dfrac{(t+1)^3}{4}$ (21)
   Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 2 de R soit R_2.

4. On suppose comme en I.4) que f est définie par : $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = \sin(t)$ (8)

   (a) Déterminez le polynôme $S_{5,f}$ selon la définition de I.3), et déterminez les réels $c_0, c_l, ..., c_5$, tels que :
   $\forall t \in [-1,1],\ S_{5,f}(t) = \sum_{k=0}^{5} c_k P_k(t)$ (22)

   (b) Déterminez le polynôme de meilleure approximation d'ordre 4 de $S_{5,f}$ soit V_4. On exprimera $V_4(t)$ sous forme de combinaison linéaire des t^k

   (c) Montrez que V_4 est une approximation de f strictement meilleure que $S_{4,f}$, soit
   $N(f - V_4) < N(f - S_{4,f})$ (23)
   On pourra utiliser les propriétés (15) et (18), démontrées au II 2).

   (d) Quel lien existe-t-il entre les questions II.4.c) et I.5.a) ?