MP DS n°8 concours blanc Février 2019

(durée 4 heures)

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est composé d'un problème et d'un exercice indépendants.

PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1. **Fonction Gamma d'Euler**
   (a) Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est integrable sur $]0,+\infty[$.
   On pose, pour $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$
   (b) Determiner, pour $x \in]0,+\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.
2. **Fonction zêta de Riemann**
   On rappelle que la fonction zéta est definie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.
   On connait $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous. On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.
   (a) On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x>1$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^x}$ Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x>1$, $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$
   (b) On fixe l'entier $p \geqslant 2$ et un reel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| \leqslant \varepsilon$
   (c) Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} pres.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3. **Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions**
   Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :
   si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors, la suite de réels $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   On commencera par donner un sens à l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ juste en énonçant un théorème.

4. **Exemples et contre-exemples**

   (a) Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

   Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées

   (b) Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

5. **Cas d'un intervalle quelconque**

   (a) Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $I=[0,+\infty[$ par

$$f_n(x)=\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

   que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a,b]$ par un intervalle I non borné.

   Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

   (b) Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I.

   On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I.

   i. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x\in I$, $|f(x)|\leqslant 1+|f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I.

   ii. Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I.

6. **Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions**

   On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

   si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x\in I$: $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$

   (a) Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.

   (b) Exemples

   i. Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.

   ii. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7. **Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions**

   Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :

   si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors, la série de réels $\sum\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

8. **Intégration terme à terme d'une série de fonctions**

   Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f.
   Enoncer le théorème de cours que l'on notera **TH 4** dont la conclusion est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$$

   Application : théorème de Hardy
   On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

   (a) Montrer que la série de fonctions $\left(\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série numérique.

9. **Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas**

   (a) Montrer que, la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

   (b) Montrer que, pour la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

   (c) Montrer que, néanmoins, $(\sum \displaystyle\int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x)_{n\geqslant 0}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right) \mathrm{d}x$$

10. **Théorème de convergence monotone**
   Soit$\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
   On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.
   On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.
   Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que : la série $(\sum \displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\geqslant 0}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$

11. **Application à la physique**

   (a) Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

   On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$
   Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
   La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

   où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
   Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$
   Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \dfrac{c}{4}u$

(b) Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 (k_B)^4}{15 h^3 c^2}$

12. **Généralisation**

    (a) Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$

    (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ et une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

Exercice

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement : "la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche". On note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = a p_n + b$.
3. En déduire pour tout entier n non nul la valeur de p_n.