DS n°1 : Algèbre
mercredi 12 septembre 2018 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème 1

Soit α un complexe. On note $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

Préliminaire

- Supposons que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau. En considérant $\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et en s'intéressant à α^2 , montrer que α est racine d'un polynôme à coefficients entiers, de degré 2, à coefficient dominant égal à 1.
- Réciproquement, supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. Montrer qu'alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

On a donc montré que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau si et seulement si α est racine d'un polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1), de degré égal à 2 et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

Soit n un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier.

- Justifier rapidement que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Est-il intègre ?
- Montrer que l'application $\begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \\ (a, b) & \rightarrow a + b\sqrt{n} \end{cases}$ est bijective.
- Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Pour $x = a + b\sqrt{n}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on note $\hat{x}$ l'élément $\hat{x} = a - b\sqrt{n}$.
Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{n}] & \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \\ x & \rightarrow \hat{x} \end{cases}$ est un automorphisme d'anneaux involutif (Rappel : une application f est dite involutive lorsqu'elle vérifie $f^{-1} = f$).
- Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ on pose $N(x) = x\hat{x}$. Montrer que :
 - $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}], N(x) = 0 \iff x = 0$
 - $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]^2, N(xy) = N(x)N(y)$
- Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ si et seulement si $|N(x)| = 1$.
- Dans cette question on pose $n = 7$.
 - Montrer que $8 + 3\sqrt{7}$ est inversible et donner son inverse.
 - Montrer qu'il existe une infinité d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
- On revient au cas général sur n .
On note G l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et G^+ l'ensemble des éléments inversibles positifs de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
 - Montrer rapidement que $(G^+, \times)$ est un groupe.
 - Soit $x \in G : x = a + b\sqrt{n}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $x \geq 1 \iff (a \geq 1 \text{ et } b \geq 0)$
 - Montrer que $\forall M \geq 1, G \cap [1, M]$ est fini.
 - Montrer que $(G^+, \times)$ est monogène.

Exercice 1

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On dira que A est un anneau principal si et seulement si tout idéal de A est engendré par 1 élément

1. Ecrire mathématiquement le fait que l'anneau A est principal.
2. Donner deux exemples d'anneau principal.
3. On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Montrer que $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.
4. Soit $J = \{2n + PX/n \in \mathbb{Z}, P \in \mathbb{Z}[X]\}$. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal.

Exercice 2

Soit $(G, \times)$ un groupe cyclique engendré par a de cardinal n .

1. Soit d un diviseur entier de n . Montrer que $H = \langle a^d \rangle$ est un sous-groupe de G .
2. Soit H un sous-groupe de $(G, \times)$. Montrer que H est cyclique.
3. Que conclure ?