

DS n°3

Mercredi 17 octobre 2018 (durée 4 heures)

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\forall P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $n \geq \deg P$.

- (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
(b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
- On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note N'_1 la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N'_∞ la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N'_1 et N'_∞ sont-elles équivalentes?

Exercice 2.

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \sqrt{n})^{-n}$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ où $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Problème 1.

I. Autour de la série harmonique

On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- Démontrer que la série $\sum_{k>0} \frac{1}{k}$ diverge et donner un équivalent de S_n . (*indication : on pourra s'intéresser à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n > 0$, $v_n = \ln \frac{n+1}{n}$*)
- On note $u_n = S_n - \ln(n)$
 - Étudier la monotonie de (u_n) .
 - Démontrer que (u_n) converge. On notera γ sa limite. γ est appelé constante d'Euler.
 - Étudier la monotonie de la suite (a_n) où $a_n = u_n - \frac{1}{2n}$
 - En déduire l'encadrement $\frac{1}{2} < \gamma < 1$
 - On pose $u_n = \gamma + r_n$.
Justifier l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < r_n < \frac{1}{2n}$.
Combien de termes $\frac{1}{k}$ faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-10} en utilisant la suite (u_n) ?

II. Complément au critère de D'Alembert.

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1$.

- Montrer que la suite $(\ln(u_n \cdot n^\alpha))$ est convergente au moyen de la série associée. on notera ℓ sa limite.
En déduire en fonction de ℓ un équivalent de u_n .
- Donner alors un critère de convergence de la série $\sum u_n$.
- Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{n!}{x^n} \ln(1+x) \ln(1+\frac{x}{2}) \dots \ln(1+\frac{x}{n})$ avec $x > 0$.

Problème 2: à propos du théorème de Césaro

I. Le théorème de Césaro

On admet le théorème suivant déjà prouvé en classe :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels et soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

Si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors la suite (v_n) converge également vers ℓ .

II. Etude d'une suite récurrente

On considère un réel a et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Étudier rapidement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \rightarrow x(1 - x)$, et tracer sa courbe représentative (C) ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$; on précisera la position de (C) par rapport à (Δ) .
2. Montrer que $[0, 1]$ est stable par f .
3. On suppose que $a \in [0, 1]$.

(a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

(b) On suppose que $a \in]0, 1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{1}{4}]$.

Soit $y_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$.

Simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} y_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et donner un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

4. On suppose ici $a < 0$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
5. On suppose ici $a > 1$. Quel est le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

III. Réciproque éventuelle du théorème de Césaro

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (1)

1. Que penser de la réciproque du théorème de Césaro ?
2. On suppose ici que (u_n) est une suite décroissante de réels positifs. Montrer que $\lim_{+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. On suppose ici que (u_n) vérifie $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $u_0 = 0$.

En écrivant $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i)$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i(u_{i+1} - u_i)$.

En déduire que $\lim_{+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 0$.

Césaro encore

Prouver le théorème de Césaro dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $\ell > 0$ (indication : on pourra s'intéresser aux équivalents des sommes partielles des séries divergentes à termes positifs)