DS n°3 sujet PLUS DUR

Mercredi 17 octobre 2018 (durée 4 heures)

Pour Awadni, Bernard-Hême, Francis, Lataste

Les calculatrices sont interdites.

Exercice : Suites de Cauchy

Soit E un evn, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dira que cette suite est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N \Longrightarrow \|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors cette suite est bornée.
3. Montrer que si E est de dimension finie alors toute suite de Cauchy est convergente.
4. Dans cette question, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$). On le munit de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)| \,/ x \in [a, b]\}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|_\infty)$. On va montrer que cette suite converge dans E pour la norme infinie
   (a) Soit $x \in [a, b]$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente. Notons $\ell(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction ℓ est bornée sur $[a, b]$
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - \ell\|_\infty = 0$ (ici on travaille sur l'espace vectoriel $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$).
   (d) Réservé aux 5/2 : Enfin, montrer que $\ell \in E$. Les 3/2 admettront ce résultat.
   (e) Conclure

Problème I. Autour de la série harmonique

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k>0} \frac{1}{k}$ diverge et donner un équivalent de S_n.
2. On note $u_n = S_n - \ln(n)$
   (a) Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge. On notera γ sa limite. γ est appelé constante d'Euler.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (a_n) où $a_n = u_n - \dfrac{1}{2n}$
   (d) En déduire l'encadrement $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$
   (e) On pose $u_n = \gamma + r_n$.
   Justifier l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < r_n < \dfrac{1}{2n}$.
   Combien de termes $\dfrac{1}{k}$ faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de γ à la précision 10^{-10} en utilisant la suite (u_n) ?
3. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ordonnés : $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ où $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11$.... On note alors , pour $p \in \mathcal{P}$, $a_p = \ln\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{p}}\right)$.

(a) Ecrire $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique.

En déduire que $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_1}}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_2}}...\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ s'écrit comme une somme de termes $\dfrac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}}$ où les α_i sont des entiers positifs.

(b) Montrer que $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_1}}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_2}}...\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}} \geqslant S_n$. Conclure sur la convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_n}$.

II. Autour de la transformation d'Abel.

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

   On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et pour $1 \leqslant n,\ T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

   Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ T_n = A_n b_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) - a_0 b_1$, si possible sans faire de récurrence.

2. On suppose ici $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, |A_n| \leqslant M$ et la suite (b_n) est une suite réelle qui décroît et tend vers 0. Montrer alors que la série $\sum a_n b_n$ converge.

3. Application : on va déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{n}$ pour $x \in]0,\pi[$..

   (a) Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(nx)\right| \leqslant \dfrac{2}{|1-e^{ix}|}$.

   (b) En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{n}$ pour $x \in]0,\pi[$.

III. Complément au critère de D'Alembert.

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1$.

1. Montrer que la suite $(\ln(u_n.n^\alpha))$ est convergente au moyen de la série associée.
2. Donner alors un critère de convergence de la série $\sum u_n$.
3. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n!}{x^n}\ln(1+x)\ln(1+\dfrac{x}{2})...\ln(1+\dfrac{x}{n})$ avec $x > 0$.

IV.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 \geq 1, \\ \text{la suite } (a_n) \text{ est bornée, et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0, \\ \text{la série } \sum(a_n) \text{ diverge.} \end{array}\right.$$

On note alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geq 2,\ b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_k}$

1. Déterminer la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$.
2. Un exemple. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.
3. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

   (a) Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

   (b) Prouver que $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$. Déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

3. Soit c_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (d_n) à termes positifs tels que $d_n = o(c_n)$ et $\sum(d_n)$ diverge.