DS n°5 :mercredi 19 décembre 2018 (durée 4 heures)

Toute calculatrice interdite

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R,R[$.
3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.
4. En justifiant soigneusement, en déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$

Exercice 2

1. Énoncer puis DÉMONTRER la formule de Taylor avec reste intégral dans le cas d'une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle I avec $0 \in I$.
2. Démontrer que la fonction $\varphi : x \to \frac{e^x-1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et qu'une fois prolongée, la fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Un théorème des moments : Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 1$:
$$\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
On suppose, que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.
L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R,R[$.
   (a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) À l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$ démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0,1]$.
   (c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.
4. Donner un exemple de fonction f a la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coincide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.
5. On se propose, dans cette question, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.
Soient a un reel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-a,a[$. On suppose qu'il existe un reel $M > 0$ tel que, pour tout reel $x \in]-a,a[$ et pour tout entier naturel n, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.

(a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

(b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

Problème : Série de fonctions

Dans tout le problème, α est un réel fixé.

1. Déterminer selon les valeurs de α la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^2}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \mapsto f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{1+x^2}n^{\alpha-2} \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{x}n^{\alpha-2}$.

   (b) Etudier les variations de f_n

   Lorsque la série de terme général $f_n(x)$ converge, on pose $\Phi_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (c) Préciser, selon la valeur de α, l'ensemble D_α de définition de Φ_α.

   (d) Montrer que Φ_α est une application impaire.

   (e) Montrer que si $\alpha < 1$, alors il existe une constante A (qui dépend de α) telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{Ax}{1+x^2} \leq \Phi_\alpha(x) \leq \dfrac{A}{x}$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Phi_\alpha(x)$.

   Désormais, dans toute la suite du problème, on suppose $\alpha < 1$.

3. On suppose dans cette question $\alpha < 0$.

   (a) Prouver la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$.
   Qu'en déduit-on quant à la continuité de Φ_α?

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \Phi_\alpha(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}n^{\alpha-2}\ln(1+n^2)$.

4. On suppose dans cette question $0 \leq \alpha < 1$.

   (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement sur $[\lambda, +\infty[$.
   Etudier la continuité de Φ_α sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_\alpha(\dfrac{1}{N}) > N.\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n^\alpha}{N^2+n^2}$.

   (c) Etudier le membre de droite de l'inégalité précédente et en déduire la discontinuité de Φ_α en 0.

   (d) La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

5. De l'étude de la fonction $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ t \mapsto h(t) = \dfrac{1-t}{(1+t)^2}$, déduire les variations de f_n' sur $[0, +\infty[$.
   Montrer que Φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.