DS n°7

mercredi 30 janvier 2019

Sujet plus dur

Transformation de Laplace

Les fonctions utilisées dans ce problème sont continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes.
Soit f une telle fonction. Pour $s \in \mathbb{C}$, si le symbole $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ a un sens, on note $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$.
$L(f)$ est la transformée de Laplace de f.

I) Définition et étude de L(f)

On suppose que f vérifie la propriété suivante : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \to f(t)e^{-\alpha t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$.
on note $A(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} / \ t \to f(t)e^{-\alpha t}$ est bornée sur $[0, +\infty[\ \}$.

1. (a) Montrer que $A(f)$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. On note $\alpha(f)$ sa borne inférieure : $\alpha(f) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
   (b) Montrer que $\alpha(f)$ peut-être fini ou infini.
   Montrer que si $\alpha(f) \in \mathbb{R}$, alors $\alpha(f)$ peut-être dans $A(f)$ ou non.

2. (a) Soit $s \in \mathbb{R}$ avec $s > \alpha(f)$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)e^{-st} = 0$
   (b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(s) > \alpha(f)$, alors la fonction $t \to f(t)e^{-st}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
   (c) $L(f)$ est-elle définie en $s = \alpha(f)$ si ($\alpha(f) \in \mathbb{R}$ et $\alpha(f) \in A(f)$) ?
   (d) Que vaut $\alpha(f)$ si f est une fonction polynomiale non nulle ?
   Calculer $L(u)$ où u est la fonction définie par $u(t) = t$.
   (e) Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. On définit $e_\gamma : t \to e^{\gamma t}$. Que vaut $\alpha(e_\gamma)$? Calculer $L(e_\gamma)$.

3. (a) Montrer que $L(f)$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[$; Montrer que $L(f)$ est continue sur
   $\Lambda = \{s \in \mathbb{C} / \ \mathcal{R}e(s) > \alpha(f)\}$

   Dans toute la suite, on se limite à $s \in \mathbb{R}$

   (b) Étudier la limite de $L(f)(s)$ quand s tend vers $+\infty$.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n f : t \to t^n f(t)$. Montrer que $\alpha(u^n f) = \alpha(f)$.
   (b) Montrer que $L(f)$ est de classe c^∞ sur $]\alpha(f), +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n(L(f)) = (-1)^n L(u^n f)$

   Dans la suite, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note F_α l'ensemble des $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $\alpha(f)$ existe, $\alpha(f) \leqslant \alpha$. On note aussi C_α^∞ l'espace des fonctions C^∞ sur $]\alpha, \alpha(f)[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   F_α est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et L une application linéaire de F_α dans C_α^∞

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. on note $\mathcal{E}_\alpha$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions du type $t \to e^{\gamma t}P(t)$ où $\gamma \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(\gamma) \leqslant \alpha$ et P une fonction polynomiale.
   (a) Vérifier que $\mathcal{E}_\alpha \subset F_\alpha$, que $\mathcal{E}_\alpha$ est stable par dérivation et par la multiplication par e_ω où $\mathcal{R}e(\omega) \leqslant 0$.
   (b) Déterminer $L(e_\gamma u^r)$ où $r \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}e(\gamma) \leqslant \alpha$.
   (c) Montrer que si P est une fonction polynomiale, alors $R = L(e_\gamma P)$ est une fonction rationnelle. Quels en sont ses pôles ?

(d) On suppose que $\forall s \in]\alpha, +\infty[,\ R(s) = 0$. Montrer que $R = 0$ puis que $P = 0$.

(e) Montrer que la restriction de L à $\mathcal{E}_\alpha$ est injective.

6. (a) On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que f et f' sont dans un même E_α. Montrer que $\forall s > \alpha,\ L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$

   (b) Donner une généralisation pour f de classe C^p sur $[0, +\infty[$. On donnera les hypothèses utiles avec précision.

   (c) Sous les hypothèses du a. , étudier la limite de $sL(f)(s)$ quand s tend vers $+\infty$.

7. (a) On suppose que $\alpha(f) = 0$ et que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Étudier la limite de $L(f)$ en O^+.

   (b) Généraliser ce résultat au cas où $\alpha(f)$ est un réel quelconque.

II) Application

1. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

   Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

   (a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie réelle l en $+\infty$.

   (b) Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ \left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \geqslant \dfrac{1 - \cos(2t)}{2t}$.

   En déduire que la fonction $\dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

   (c) Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $t \longmapsto \sin(t)\ e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ e^{-xt}\mathrm{d}t$.

   (d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire l.