DM n°12 PLUS DUR

à rendre mercredi 3 avril 2019

Rappel : Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Equations différentielles

On considère deux applications a et b de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et toutes deux périodiques de période π ; on désigne par (E) l'équation différentielle suivante : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (E)
et l'on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On désigne par A la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 ($\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \displaystyle\int_0^x a(t)\,dt$).

PARTIE I

1. (a) Montrer qu'il existe un couple unique $(u, v) \in \mathcal{S}^2$ tel que $u(0) = v'(0) = 1$ et $u'(0) = v(0) = 0$.
   (b) Vérifier que (u, v) est une base de $\mathcal{S}$ et donner les coordonnées d'un élément f de $\mathcal{S}$ dans cette base en fonction de f.
2. (a) Prouver que u et v sont à valeurs réelles (on montrera que $u = \bar{u}$ et $v = \bar{v}$).
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $W(x) = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$ et $\omega(x) = \det W(x)$.
   Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega(x) > 0$.
   Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega'(x) = -a(x)\omega(x)$, puis exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $\omega(x)$ à l'aide de $A(x)$.
3. A toute application f de $\mathcal{S}$ on associe l'application $\tilde{f} = T(f)$ définie par
   $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x + \pi)$.
   (a) Prouver que T définit un endomorphisme de $\mathcal{S}$ et que $\operatorname{mat}_{(u,v)} T = W(\pi)$.
   (b) Prouver que $\det T = \exp(-A(\pi))$ et que $\operatorname{tr} T = u(\pi) + v'(\pi)$.
   Ainsi, on pourra exploiter dans la suite du problème que $\det T$ *est un réel strictement positif et que* $\operatorname{tr} T$ *est un réel.*
   (c) Prouver qu'il existe dans $\mathcal{S}$ une application non nulle et 2π-périodique si et seulement si le spectre de T contient 1 ou -1.
4. Soit λ une valeur propre de T et V_λ le sous-espace propre associé.
   (a) Soit $\varphi \in V_\lambda \backslash \{0\}$.
   Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $|\lambda| \leq 1$ (on évaluera $\varphi(x + k\pi)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$).
   (b) On suppose dans cette question que λ est une racine n-ième de l'unité différente de 1 et de -1, où n est un entier fixé, supérieur ou égal à 3.
   Prouver alors que tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont périodiques de période $n\pi$ (on utilisera une base judicieuse de $\mathcal{S}$, après avoir prouvé que T est diagonalisable).
5. L'équation différentielle (E) est dite *stable* lorsque chaque élément de $\mathcal{S}$ est une application bornée sur $\mathbb{R}_+$; (E) est dite *instable* dans le cas contraire.
   (a) On suppose dans cette question que T est diagonalisable.
   A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur le spectre de T) (E) est-elle stable ?

(b) On suppose dans cette question que T n'est pas diagonalisable.

Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{S}$ et d'un unique réel λ tels que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0} T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0} T^n$.

En examinant trois cas de figure, prouver que (E) est stable si et seulement si $\lambda \in]-1,1[$.

6. On se place ici dans le cas particulier où a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et où $b = a'$ (b est la dérivée de a).

(a) Exprimer la solution générale de (E) à l'aide de la fonction A et d'une primitive non calculée explicitement (on cherchera à reconnaître dans le membre de gauche de (E) la dérivée d'une fonction).
Prouver que $\operatorname{tr} T = 1 + \exp(-A(\pi))$.

(b) En étudiant le signe de $A(\pi)$, prouver que (E) est stable si et seulement si $A(\pi) > 0$.

PARTIE II (Il est recommandé d'aborder cette partie après avoir traité l'essentiel de la première partie)

On se place dorénavant dans le cas où $a = 0$ et $b = \delta^2 + \gamma q$, avec $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et q application continue, périodique de période π et à valeurs réelles. On pose $h = |q|$ et l'on définit H par $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$.

1. Résoudre (E) dans le cas $\gamma = 0$.
(E) est-elle alors stable ?
Désormais (jusqu'à la fin du problème), on suppose $\gamma \neq 0$.

2. Montrer que tout élément f de $\mathcal{S}$ vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\cos\delta x + \dfrac{f'(0)}{\delta}\sin\delta x - \dfrac{\gamma}{\delta}\displaystyle\int_0^x \sin(\delta(x-t))f(t)q(t)\,dt$ (on pourra par exemple remarquer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + \delta^2 y = -\gamma q f$ et utiliser la méthode de variation des constantes).

3. On reprend le couple $(u, v) \in \mathcal{S}^2$ défini au I.1).

(a) Soit $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et g une application définie , continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles positives et vérifiant $:\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leq \alpha + \beta\displaystyle\int_0^x g(t)h(t)\,dt$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha + \beta\displaystyle\int_0^x g(t)h(t)\,dt \leq \alpha\exp(\beta H(x))$.

(b) Exploiter alors le résultat du II.2). pour prouver que

$$1 + \frac{|\gamma|}{\delta}\int_0^\pi |u(t) + i\delta v(t)|\,h(t)\,dt \leq \exp\left(\frac{|\gamma|}{\delta}H(\pi)\right)$$

4. On reprend l'endomorphisme T défini au I.3.

(a) Calculer $\det T$ et démontrer que $\operatorname{tr} T = 2\cos(\delta\pi) + m$, où $|m| \leq \exp\left(\dfrac{|\gamma|}{\delta}H(\pi)\right) - 1$.

(b) En déduire enfin que si γ et δ vérifient l'inégalité $|\gamma|H(\pi) < \delta\ln(3 - 2|\cos(\delta\pi)|)$, alors l'équation différentielle (E) est stable.

(c) Dans le cas $H(\pi) = 2$, effectuer un tracé sommaire de la zone de stabilité ainsi obtenue à la question précédente en portant δ en abscisses et γ en ordonnées.