

à rendre mercredi 3 avril 2019

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.
2. Pour deux réels A et B , déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A \cos x + B \sin x$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+ . Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+ .

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \quad x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?
5. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z : \begin{cases}]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{\frac{1}{2}} y(x) \end{cases}$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0; +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.
8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0; +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$; telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}.$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$, et on considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned}(E_\alpha) \quad & x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \\ (E'_\alpha) \quad & x z'' + (2\alpha + 1) z' + x z = 0.\end{aligned}$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $] -R; R[$ est notée S . On suppose dans cette question que R est strictement positif.

(a) Rappeler une définition du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(b) On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $] -R; R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0.$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

(a) Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout n .

(b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(c) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+1)}{n! 2^{2n} \Gamma(n+\alpha+1)} a_0.$$

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α) .

13. Soit $y:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction z :

$$z : \begin{cases}]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{-\alpha} y(x) \end{cases}$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si z est solution de (E'_α) sur $]0; +\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0; +\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0, f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n+\alpha} \Gamma(n+\alpha+1)} x^{2n+\alpha}$$

est solution de (E_α) sur $]0; +\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x , expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière.

En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = kf'_p(x).$$

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x \sin t) dt.$$

17. Démontrer que g_p est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme d'une intégrale) les fonctions g'_p et g''_p .

18. En intégrant par parties $g'_p(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p) .

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \int_0^\pi \sin^n t dt$.

(a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $nw_n = (n-1)w_{n-2}$.

(b) Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n .

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cdot \sin(x \sin t) dt,$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2g'_p(x).$$

23. Démontrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ les fonctions f_p et g_p sont égales.