DS n°10 sujet normal

Mercredi 13 Mars 2019 (durée 4 heures)

Les calculatrices sont interdites.

Exercice

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: si $k_1, \ldots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n pre,d la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note $\{X_1, \ldots, X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1, \ldots, X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \ldots, k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(U_2)$.
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?
3. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?
4. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.
5. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.
6. Justifier
$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right)$$
où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.
7. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:
$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n))$$
8. Exprimer $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

9. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.
10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.
11. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

    Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.
    (a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.
    (b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

On note, pour n entier tel que $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.
On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser ici sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, $A = P^{-1}BP$ entraîne $T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : "une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$".
Pour cela, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Q.7 On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \geq 1$) les valeurs propres distinctes de u. Démontrer que le polynôme $P = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_p)$ est annulateur de u.

Q.8 Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont r nombres réels distincts ($r \geq 1$) tels que $Q = (X - \mu_1)\ldots(X - \mu_r)$ est un polynôme annulateur de u. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.9 On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale vérifiant $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

Q.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q.11 On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

Q.12 On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.13 Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Q.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Q.15 On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Q.16 Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X. En déduire la valeur de la matrice A.

Q.17 Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q.18 On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q.19 Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

Q.20 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u.
On pourra s'inspirer de la question 10.

Q.21 En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

Q.22 Utiliser la question 21 pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

On ne demande pas de détail.

Q.23 Sachant que la solution φ du système différentiel $X' = MX$ vérifiant $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est la fonction

$t \mapsto e^{tM} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où e^{tM} désigne l'exponentielle de la matrice tM, déterminer la matrice e^M.