MP DS n° 11 Mercredi 27 mars 2019

Toute calculatrice interdite

Exercice I

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 .$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1. Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^-.

II.2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J.

Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

II.3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E): \quad x^2 y'' + x y' = 0 .$$

Déterminer S^+ et S^-.

Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S.

II.4. Dans cette question (E) : $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ (α réel).

En déduire S^+ puis S^-.

Déterminer S et donner la dimension de S.

II.5. Donner un exemple d'équation différentielle du type (E) : $x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. a). Soit f une fonction vérifiant $(\mathscr{E})$. Montrer qu'alors il existe une fonction réelle a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x) \cdot f(x,y)$

(on pourra introduire la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$, et calculer $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$)

- En déduire que f vérifie $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x) f(x,y)$

(b) En déduire que les solutions de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\,\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathscr{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ,ψ) ?

(c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \ \text{ et } \ \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x,y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
   (b) Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Exercice III

On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3iy'(x) + (e^{ix} - 2)y(x) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

où y représente une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1°. (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on notera $S_{2\pi}$.

(b) Etablir qu'une solution φ de l'équation $(\mathcal{E})$ est 2π-périodique si et seulement si :

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).$$

2°. (a) Soit f une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$. Démontrer que la série de Fourier de f converge vers f en précisant le mode de convergence (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

(b) Soit φ une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$ définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

(i) Déterminer une relation de récurrence liant c_{k-1} et c_k.

(ii) En déduire que : $\forall k \leq 1,\ c_k = 0$.

(iii) Exprimer c_k en fonction de k et de c_2, pour tout $k \geq 2$.

3°. Démontrer que l'espace vectoriel $S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension. Toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont-elles 2π-périodiques?

4°. On considère la solution φ obtenue ci-dessus en posant $c_2 = 1$ et on note φ_1 sa partie réelle et φ_2 sa partie imaginaire ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$).

(a) Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire.

(b) Montrer que $\varphi_1(0) > 0$.

(c) Etablir que φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$ en déterminant (α, β, γ) tels que :

$$0 < \beta < \gamma < 2\pi \text{ et } \varphi_1(\alpha) < 0, \varphi_1(\beta) > 0, \varphi_1(\gamma) < 0.$$