DM n°2 : Algèbre linéaire

À rendre mercredi 25 septembre 2019

Problème

Soit $V = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$, donné.
On définit la matrice $C = (c_{i,j})_{i,j \in [[1,n]]}$ par $c_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $i \leq n-1$, $c_{n,j} = -a_{j-1}$, et $c_{i,j} = 0$ sinon.
On note γ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant pour matrice C dans la base canonique.
On note δ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant pour matrice ${}^tC$ dans la base canonique.

Partie I

1. Représenter C sous forme de tableau.
2. Soit $Q = X^n + \sum_{i \leq n-1} a_i X^i$.
   (a) Montrer que le polynôme caractéristique de C est proportionnel à Q.
   (b) Quel est alors le polynôme caractéristique de γ et de δ ?
3. À quelle condition sur V la matrice C est-elle inversible ?
4. Donner en fonction de a_0 le rang de C.
5. Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
   On définit la famille $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ suivante : pour $i < n$ alors $\epsilon_i = e_{n+1-i} + \sum_{j \leq n-i} a_{j+i-1} e_j$, et $\epsilon_n = e_1$.
   (a) Montrer que $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Soit T la matrice de passage de $(e_1, ..., e_n)$ à $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$. Déterminer T.
   (c) Sans calcul, comparer ${}^tC.T$ et $T.C$.
   (d) Déterminer $\delta(\epsilon_i)$ dans la base $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$.
   (e) Montrer que la matrice de δ dans la base $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ est C.
   (f) En déduire que $T.C$ est symétrique.
6. Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients complexes dont les valeurs propres sont distinctes 2 à 2.
   (a) A est-elle diagonalisable ?
   (b) Soit $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_r X^r$ un polynôme. On note $R(A)$ la matrice $R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_r A^r$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $R(A) = P.R(D).P^{-1}$.
   (c) En utilisant la question précédente, montrer que la famille $(I, A, A^2, ..., A^{n-1})$ est libre.
   (d) Montrer que A^n est combinaison linéaire de $I, A, ..., A^{n-1}$.
   (e) Montrer qu'il existe un vecteur colonne X tel que $(X, AX, ..., A^{n-1}X)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (on pourra choisir un vecteur $X = PY$ où Y est un vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont non nulles).
   (f) Montrer qu'il existe une matrice C définie comme dans l'introduction telle que A et ${}^tC$ sont semblables.

Partie II

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n racines complexes de $\mathbb{Q}$ non nécessairement distinctes 2 à 2 (voir I. 2.)
Pour $i \leq n$ on note V_i le vecteur colonne défini par ${}^tV_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, ..., \lambda_i^{n-1})$.

1. Montrer que V_i est vecteur propre de C associé à ma valeur propre λ_i.
2. Soit M la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(V_1, ..., V_n)$. Montrer que $C.M = M.D$ où D est une matrice diagonale à préciser (attention, rien ne dit que $(V_1, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$).
3. On suppose à partir de maintenant que les λ_i sont distincts 2 à 2.
   (a) Déterminer une base dans laquelle la matrice de γ est diagonale.
   (b) Montrer que $(M.{}^tM)^{-1}.C.(M.{}^tM) ={}^t C$.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de valeurs propres 2 à 2 distinctes.
   Soit g un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $g \circ f \circ g^{-1} = f$.
   (a) Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Montrer qu'alors $(x, g(x))$ est liée
   (b) Montrer que la restriction de g à tout sous-espace propre de f est une homothétie.
5. Montrer que ${}^tM.T.M$ est une matrice diagonale.