DM n°4

A rendre mercredi 6 novembre 2019

Problème 1

Le but du problème est d'étudier la suite réelle (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+1} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_0 = id_{\mathbb{R}}$ et $f_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(\exp) \circ (f_n)$, et ainsi $u_n = f_n(u_0)$.

I. Préliminaires

1. Montrer que $\forall x \geqslant 3,\ e^x > (x+1)^2$

2. (a) Étudier les variations de $g_n : x \to \dfrac{1}{n+1}e^x - x$.

   (b) En considérant g_0 et g_1, comparer $u_0,\ u_1,\ u_2$.

3. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer f_n' en fonction des f_k. En déduire que f_n est strictement croissante.

   (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n a une limite finie, qu'on notera α_n, quand x end vers $-\infty$.
   Donner une relation de récurrence définissant α_n.

   (c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

   (d) Déterminer I_n tel que $f_n : \mathbb{R} \to I_n$ soit bijective.

   (e) Montrer que f_n^{-1} est de classe C^1 sur I_n.

4. Rappel d'une définition : $\boxed{\text{L'intervalle } I \text{ est stable par l'application } \varphi \text{ si et seulement si } \varphi(I) \subset I.}$

   Pour quels couples $(p, M) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]-\infty, M]$ est-il stable par $\dfrac{1}{p}exp$?

II. Variations et convergence de (u_n).

1. (a) Montrer que $u_p \geqslant u_{p+1} \Longrightarrow u_{p+1} > u_{p+2}$

   (b) Montrer que la suite (u_n) est soit strictement croissante, soit strictement décroissante à partir d'un certain rang.

   (c) Quelles sont les éventuelles limites possibles de (u_n) ?

2. En donnant des valeurs approchées de α_3 et α_4, justifier l'existence d'un $u_0 \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) n'est pas croissante.

   Dans la suite du problème **on note C l'ensemble des $u_0 \in \mathbb{R}$ tels que (u_n) converge, et on note D le complémentaire de C dans $\mathbb{R}$:** $D = \mathbb{R} \backslash C$

3. (a) Montrer que C n'est pas vide. Vérifier à la calculatrice que $u_0 = 0,31$ est dans C (on veut voir les différents résultats numériques).

   (b) Si $u_0 \in C$, que vaut $\lim u_n$? Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$

   (c) Montrer que (α_n) converge, et donner sa limite.

4. (a) On suppose que (u_n) est croissante. Montrer que $u_0 \in D$.

   (b) Montrer que pour $p \geqslant 3,\ u_p \geqslant p \Longrightarrow u_{p+1} \geqslant p+1$.

   (c) A l'aide de f_3, montrer que D n'est pas vide. Montrer que $u_0 = 0,32$ est dans D.

Problème 2 : Sommation par paquets, changement de l'ordre des termes

Les questions : On dispose d'une série convergente $\sum u_n$.
1) Si on regroupe les termes de la première série par paquets (par exemple par paquets de 2, ou même par paquets de taille variable), la nouvelle série est-elle toujours convergente et dans l'affirmative, les deux sommes sont-elles égales ?
2) Si on modifie l'ordre des termes de la série, la nouvelle série est-elle toujours convergente et dans l'affirmative, les deux sommes sont-elles égales ?

A. Sommation par paquets sans modification de l'ordre

On considère la série $\sum u_n$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $v_p = u_{2p} + u_{2p+1}$. En travaillant sur les sommes partielles, montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum v_p$ converge et qu'alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} v_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   Réciproque ? On considère la série $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n$. Étudier la nature des 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_p$. Que conclure sur la réciproque ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$.
   Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum w_n$ converge et qu'alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   Que penser de la réciproque ?
3. On suppose dans cette question que $\forall n,\ u_n \geqslant 0$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.
4. On suppose dans cette question que (u_n) converge vers 0.
   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$ telle que $\exists M > 0, \forall n, \varphi(n+1) - \varphi(n) \leqslant M$ (chaque paquet ne contient pas plus que M éléments).
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.
   Exemple : étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n} \cos(\frac{n\pi}{3})$

B. Modification de l'ordre des termes

On considère la série harmonique alternée $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On sait que cette série converge vers $\ln(2)$. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{4n-2} - \dfrac{1}{4n}$.

1. Montrer que les ensembles $\left\{\dfrac{1}{2n-1}, -\dfrac{1}{4n-2}, -\dfrac{1}{4n} / n \geqslant 1\right\}$ et $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} / n \geqslant 1\right\}$ sont en bijection.
2. Étudier la convergence de la série $\sum v_n$ et donner la valeur de sa somme.
3. Comparer avec $\sum u_n$. Quel résultat étonnant vient on de mettre en évidence ?

Riemann a démontré que pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)}$ converge vers ℓ.
Cette situation se généralise à toute série $\sum u_n$ qui est convergente mais pas absolument convergente (on dit que la série est semi-convergente). C'est le théorème de réarrangement de Riemann.
On verra dans le cours sur les familles sommables que si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors $\forall \sigma$ permutation de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$