

A rendre mercredi 13 novembre 2019

Problème 1 : DENSITÉ DES SOUS-GROUPES DE $\mathbb{R}$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E \cap]a, b[$.

PRELIMINAIRES

1. Montrer que si E est dense dans $\mathbb{R}$, alors tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'éléments de E .
2. Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim(a_n) = x$
3. Donner un exemple d'ensembles denses dans $\mathbb{R}$ et d'ensembles non denses dans $\mathbb{R}$.

PARTIE I

Le but de cette première partie est d'établir le résultat suivant :

si G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors ou bien $\exists a \in \mathbb{R}, G = a\mathbb{Z}$, ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit G un sous-groupe additif non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $G_+^* = G \cap]0, +\infty[$.

1. Montrer que $G_+^* \neq \emptyset$.
On note $\lambda = \inf G_+^*$.
2. On suppose ici que $\lambda > 0$.
 - (a) Montrer que $\text{Card}([\lambda, 2\lambda] \cap G_+^*) \geq 1$.
 - (b) Montrer que $\text{Card}([\lambda, 2\lambda] \cap G_+^*) = 1$.
 - (c) Montrer que $G_+^* = \lambda \mathbb{N}^*$.
 - (d) Quel est alors l'ensemble G ?
3. On suppose maintenant que $\lambda = 0$.
En supposant donnés deux réels a et b , avec $a < b$,
 - (a) justifier l'existence de $t \in G_+^* / 0 < t < b - a$,
 - (b) et prouver que $\exists n_0 \in \mathbb{Z} / n_0 t \in]a, b[$. Conclure.

PARTIE II : APPLICATIONS

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{Z}[\theta] = \{p + q\theta ; (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ ($\mathbb{Z}[\theta]$ se note aussi $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$)
 - (a) Montrer que si $\theta \notin \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Z}[\theta]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que si $\theta \in \mathbb{Q}$, ($\theta = \frac{u}{v}$, avec $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$) alors $\exists c \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}[\theta] = c\mathbb{Z}$.
Préciser c .
2. Soit H un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que ou bien $\exists \alpha > 0 / H = \{\alpha^n ; n \in \mathbb{Z}\}$, ou bien H est dense dans $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $Y = \{\cos n ; n \in \mathbb{N}\}$ Montrer que l'ensemble Y est dense dans $[-1, 1]$ (on pourra d'abord montrer que Y est l'image de $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ par la fonction $\cos$ et utiliser le préliminaire)

Problème 2 : Etude d'un procédé de sommation

OBJECTIFS : dans les parties I et II on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction ϕ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

NOTATIONS : Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$