DM n°6

À rendre rendre mercredi 27 novembre 2019

Utilisation des polynômes de Tchebychev

Dans tout le problème on conviendra de l'abus de notations suivant : Un polynôme et la fonction qu'il définit sur un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point seront désignés de la même manière.

On notera E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.

On notera $\widetilde{E_n}$ la partie de E_n constituée de polynômes de degré n exactement dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1 (ce sont les polynômes de degré n "normalisés").

On notera E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$

I. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité
   (a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété $(*)$:
   $(*)\ :\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ T(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$)
   (b) Montrer qu'un polynôme vérifiant $(*)$ est unique. On l'appelle Polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.
   On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par : $\forall x\in[-1,1],\ T_n(x) = \cos(n\mathrm{Arcos}x)$.
2. (a) Montrer que $\forall x\in[-1,1], \forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \qquad (**)$.
   Montrer que cette relation $(**)$ est vraie pour tout x réel.
   (b) Calculer $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3$, ainsi que $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
   (c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n.
3. Démontrer que la famille $(T_0,\ T_1,\ T_2,\ \ldots\ ,\ T_n)$ est une base de E_n.
4. Racines et extrema
   (a) Déterminer les racines du polynôme T_n et montrer qu'elles sont toutes réelles et appartiennent à $[-1,1]$.
   (b) On pose pour $k\in\{0,1,..,n\},\ c_k = \cos(\dfrac{k\pi}{n})$.
   Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que
   : $\forall k\in\{0,1,..,n\},\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que : $\forall k\in\{0,1,..,n-1\},\ T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.
   Les $n+1$ réels $c_0, c_1, ..., c_n$ sont appelés points de Tchebychev.
   (c) Dessiner le graphe de T_3, préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3.

II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Pour f et g éléments de E, on pose $< f, g >= \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos x)\ dx$.

1. Montrer que $<\ .\ >$ définit un produit scalaire sur E.
   Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E on pose $\|h\|_2 = \sqrt{< h, h >}$.
2. Calculer $< T_n, T_m >$ selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base orthogonale de E_n pour $<\ .\ >$
3. Énoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$
4. Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev. On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

III.

Dans cette partie E est muni de la norme infinie : $\|f\| = \sup_{t\in I} |f(t)|$.

On désignera par $\widetilde{T_n}$ le polynôme $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ si $n \geqslant 1$ et on posera $\widetilde{T_0} = T_0$.

A.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\widetilde{T_n}\right\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il n'existe pas de polynômes $Q \in \widetilde{E_n}$ tels que $\|Q\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (pour cela on regardera le nombre de racines du polynôme $\widetilde{T_n} - Q$ dans $[-1, 1]$.

   En déduire que la borne inférieure $\inf\limits_{Q\in\widetilde{E_n}} \|Q\|$ est égale à $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et qu'elle est atteinte pour un certain polynôme de $\widetilde{E_n}$.
3. Démontrer que lorsque $n = 1$ alors $\inf\limits_{Q\in\widetilde{E_n}} \|Q_n\|$ est atteinte en un seul point de $\widetilde{E_n}$.

B.

1. Étant donnés $(n + 1)$ points distincts de $[-1, 1]$: $x_0, x_1, ..., x_n$ et $f \in E$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme L_n appartenant à E_n vérifiant les conditions : $\forall k \in \{0, 1, .., n\},\ L_n(x_k) = f(x_k)$.

   Le polynôme L_n s'appelle le polynôme d'interpolation relatif à f et aux points $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
2. Soit f une fonction $(n + 1)$ fois continûment dérivable sur $[-1, 1]$ et L_n son polynôme d'interpolation relatif aux points $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

   (a) Soit $x \notin \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. On considère la fonction définie sur $[-1, 1]$: $\psi(t) = f(t) - L_n(t) - (t - x_0)(t - x_1)...(t - x_n)A$ où A est une constante telle que $\psi(x) = 0$. En utilisant un certain nombre de fois le théorème de Rolle montrer qu'il existe $\zeta \in]-1, 1[$ tel que $\psi^{n+1}(\zeta) = 0$

   (b) En déduire que si $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, alors
   $\forall x \in [-1, 1],\ \exists\zeta \in]-1, 1[$ tel que $f(x) - L_n(x) = \pi(x)\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}$

   (c) Montrer que $\|f - L_n\| \leqslant \dfrac{1}{(n + 1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|.\|\pi\|$.
3. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$.

   Montrer en utilisant A. que l'on peut trouver une suite de polynômes d'interpolation (L_n) telle que l'on ait les majorations $\|f - L_n\| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n+1)}\right\|}{(n + 1)!2^n}$.

   En déduire une condition suffisante sur f, indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$ pour que f soit limite dans l'espace vectoriel normé E d'une suite de polynômes d'interpolation.
4. (a) Montrer la double inégalité : $\dfrac{1}{e(n + 1)!2^n} \leqslant \|e^x - P_n(x)\| \leqslant \dfrac{e}{(n + 1)!2^n}$

   (b) Montrer que $\|e^x - S_n(x)\| = \left\|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right\| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

   En déduire la double inégalité : $\dfrac{1}{(n + 1)!} < \|e^x - S_n(x)\| \leqslant \dfrac{n + 2}{n + 1}\dfrac{1}{(n + 1)!}$ où $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

   (c) Comparer l'ordre de grandeur de $\|e^x - L_n(x)\|$ et de $\|e^x - S_n(x)\|$ lorsque n tend vers $+\infty$