DM 7

À rendre mercredi 11 décembre 2019

NOTATIONS DU PROBLEME :

On désigne par :

F : l'espace vectoriel réel des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

E : le sous-espace vectoriel de F constitué des applications polynômiales.

E_n : le sous-espace vectoriel de E des applications polynômiales de degré $\leq n$.

T : $f \mapsto T(f)$ l'endomorphisme de F, où T(f) désigne l'élément de F défini par :
$\forall x \in]0,+\infty[\quad T(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

Les éléments de E peuvent aussi être considérés comme des polynômes.

PARTIE I

1. Montrer que E est stable par T. On note alors Δ l'endomorphisme de E induit par T.
Pour $P \in E$, calculer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.

2. Prouver que le noyau de Δ est égal à E_0.

3. Montrer que Δ admet une unique valeur propre. Quel est le sous-espace propre associé ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que l'image par Δ de E_n est égale à E_{n-1}.

   b) Etablir que si l'on se donne un élément Q de E_{n-1}, alors il existe un unique élément P de E_n tel que : $Q = \Delta(P)$ et : $P(0) = 0$.

5. Applications numériques.

   a) Déterminer $A \in E_3$ de sorte que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $A(x+1) - A(x) = x^2$ et $A(0) = 0$.

   En déduire la valeur de : $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Déterminer $B \in E_4$ de sorte que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $B(x+1) - B(x) = x^3$ et $B(0) = 0$.

   En déduire la valeur de : $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE II

1. Etude de l'injectivité de T

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'élément de F défini par : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = \cos(2\pi n x)$.

   a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \operatorname{Ker}T$.

   b) Démontrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans F.

   c) KerT est-il de dimension finie ?

2. Etude de la surjectivité de T

a) On se donne un élément g de F et une fonction réelle φ définie sur $]0,1]$.
Prouver qu'il existe un et un seul élément f de F tel que : $\forall x \in \,]0,1] \quad f(x) = \varphi(x)$ et $T(f) = g$.

b) T est-elle surjective ?

3. Etude des valeurs propres de T

Soit λ un réel quelconque et $F(\lambda) = \{f \in F \,/\, T(f) = \lambda f\}$.

a) Démontrer qu'il existe un élément f de $F(\lambda)$ tel que : $\forall x \in \,]0,1] \quad f(x) = 1$.

b) Quelles sont les valeurs propres de T ?

PARTIE III

1. Soit a un réel quelconque. On se propose de montrer qu'il existe un unique élément f_a de F vérifiant l'ensemble $C_1(a)$ des conditions suivantes :

$$C_1(a) \begin{cases} \forall x \in \,]0,+\infty[\,, \; T(f_a)(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_a(1) = a \\ f_a \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

a) On suppose qu'il existe deux éléments φ et ψ de F vérifiant $C_1(a)$ et on note $\delta = \varphi - \psi$.

Prouver que : $\forall x \in \,]0,1] \; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \delta(x) = \delta(x+n)$, et préciser $\delta(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $\forall x \in \,]0,1] \; \forall n \in \mathbb{N}^* \; -\dfrac{1}{n} \leq \delta(x) \leq \dfrac{1}{n}$, et en déduire que : $\varphi = \psi$.

b) On suppose que f_a vérifie $C_1(a)$.
Déterminer la limite de f_a en 0. Déterminer la limite de f_a en $+\infty$ (on pourra utiliser la suite $(f_a(n))_{n\geq 1}$).

c) On pose, pour $x \in \,]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in \,]0,+\infty[$: $f_a(x) = a - \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Vérifier que f_a est l'unique élément de F vérifiant $C_1(a)$.

d) Etablir que f_a est continue sur $]0,+\infty[$.

e) Prouver que f_a est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\quad f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

2. On se propose de montrer qu'il existe un unique élément g de F vérifiant l'ensemble C_2 des conditions suivantes :

$$C_2 \begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[\ , \ T(g)(x) = \ln x \\ g(1) = 0 \\ g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } g' \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

a) Démontrer que si g vérifie C_2 alors il existe un réel a de sorte que g' vérifie $C_1(a)$.

b) Démontrer qu'il existe un unique élément g de F vérifiant C_2 et que cette application g est obtenue pour $a = -\int_1^2 f_0(t)dt$.

c) Etablir que : $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \right)$.

d) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[\ , \ g(x) = -\ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{x+n}{n} \right)$

3. Démontrer qu'il existe un unique élément h de F vérifiant l'ensemble C_3 des conditions suivantes :

$$C_3 \begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[\qquad h(x+1) = xh(x) \\ \forall x \in]0,+\infty[\qquad h(x) > 0 \\ h(1) = 1 \\ h \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \dfrac{h'}{h} \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

et exprimer h en fonction de g. Calculer h(n) pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour les 5/2 Montrer que $\forall x>0, \ h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$

PARTIE IV

On note, pour $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n(x) = \dfrac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. Démontrer, en utilisant des résultats obtenus au III, que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ \lim_{n \to +\infty} v_n(x) = h(x).$$

2. On se propose de calculer $h\left(\frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$.

En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

b) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

c) Exprimer $v_n\left(\frac{1}{2}\right)^2$ en fonction de $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ et de n. En déduire la valeur de $h\left(\frac{1}{2}\right)$